

# ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE, BAND 18, HEFT 4, OKTOBER 1933

## Über die Formulierung der Naturgesetze mit fünf homogenen Koordinaten

Teil II: Die Diracschen Gleichungen für die Materiewellen

Von W. Pauli

§ 1. Einleitung. — § 2. Aufbau des metrischen Tensors  $g_{\mu\nu}$  aus 5 Matrizen  $a_{\mu}$ . — § 3. Koordinaten- und  $S$ -Transformationen. — § 4. Kovariante Differentiation der Spinoren. — § 5. Zusammenhang der projektiven mit den affinen Spinoren. Aufstellung der Wellengleichung. — § 6. Variationsprinzip und Feldgleichungen.

### § 1. Einleitung

Der Versuch, die Diracschen Wellengleichungen des Elektrons umzugießen in eine Form, bei der die Wellenfunktionen von fünf homogenen Koordinaten abhängen, scheint in noch viel höherem Maße kritischen Bedenken ausgesetzt, als der entsprechende Versuch bei den klassischen Gleichungen des Gravitations- und elektromagnetischen Feldes. Selbst wenn wir davon absehen, daß solche Methoden ganz allgemein als „formal“ verschrien sind — ohne die Frage, ob dieses Urteil berechtigt ist, definitiv entscheiden zu können, können wir hiervon absehen im Hinblick darauf, daß die Methode eine *logische Vereinheitlichung* der Grundlagen der Naturgesetze bringt — muß vom physikalischen Standpunkt aus betont werden, daß die physikalischen Grundlagen der Diracschen Theorie überaus fragwürdig sind. Führt sie doch zu den der Erfahrung widersprechenden Zuständen negativer Energie der materiellen Teilchen! Die folgenden Ausführungen sollen also nicht den Zweck erfüllen, neue Stützen für die Diracschen Wellengleichungen beizubringen, sondern vielmehr zu zeigen, daß die einheitliche Zusammenfassung des Gravitations- und des elektromagnetischen Feldes durch die projektive Differentialgeometrie mittels fünf homogener Koordinaten eine *allgemeine* Methode ist, deren Tragweite über die klassische Feldphysik hinaus- und in die Quantentheorie hineinreicht. Vielleicht ist es nicht unberechtigt, zu hoffen, daß die

Methode als allgemeiner Rahmen der physikalischen Gesetze sich auch gegenüber einer künftigen, physikalisch-begrifflichen Verbesserung der Grundlagen der Diracschen Theorie bewähren wird.

Die Anwendbarkeit der Methode der fünf homogenen Koordinaten auf die Diracschen Wellengleichungen beruht darauf, daß es auch in bezug auf die Gruppe der orthogonal-linearen Transformationen von fünf Variablen Größen  $\Psi$  mit vier Komponenten gibt, die sich bei diesen Transformationen ebenfalls linear transformieren (d. h. also, daß eine vierreihige Darstellung der fünfdimensionalen Drehgruppe existiert). Spezialisiert man die orthogonalen Transformationen der Koordinaten auf die Untergruppe, welche  $X^5$  festläßt (Lorentzgruppe), so transformieren sich diese Größen speziell wie die Diracschen.

Wir begründen in der vorliegenden Arbeit (§§ 2 und 3) diesen Sachverhalt in einheitlicher Weise durch Betrachtung der Matrixgleichungen

$$I) \quad \frac{1}{2}(\alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu) = g_{\mu\nu} \cdot 1 \quad (\mu, \nu = 1 \text{ bis } 5),$$

die im analogen vierdimensionalen Fall zuerst von Tetrode aufgestellt wurden und die allgemein-relativistische Erweiterung der Diracschen Matrixgleichungen bilden. Es ist nun aber wesentlich, daß es fünf vierreihige Matrizen  $\alpha_\mu$  gibt, welche die Relationen (I) erfüllen. Wenn die Determinante der  $g_{\mu\nu}$  von Null verschieden ist, was angenommen werden darf, bilden die 16 Matrizen

$$1, \alpha_\mu, \alpha_{[\mu\nu]} \equiv \frac{1}{2}(\alpha_\mu \alpha_\nu - \alpha_\nu \alpha_\mu)$$

die Basis eines hyperkomplexen Zahlensystems. Es hat zwei wichtige Eigenschaften: erstens besitzt es eine und bis auf Äquivalenz (d. h. bis auf eine Ähnlichkeitstransformation und eventuelle Vorzeichenänderung,  $\alpha'_\mu = \pm S^{-1} \alpha_\mu S$ ) nur eine Darstellung durch vierreihige Matrizen. Wenn also ein zweites Matrixsystem  $\alpha'_\mu$  existiert, das dieselben Relationen (I) erfüllt wie die  $\alpha_\mu$ , so gibt es eine Matrix  $S$ , so daß  $\alpha'_\mu = \pm S^{-1} \alpha_\mu S$ . Die zweite Eigenschaft ist, daß die 15 Relationen (I) sich durch Matrizen mit weniger als vier Reihen nicht erfüllen lassen, daß also die vierreihige Darstellung irreduzibel ist. Daraus kann gefolgert werden, daß jede Matrix, die mit allen fünf Matrizen  $\alpha_\mu$  vertauschbar ist (es genügt sogar, daß dies mit vier der Matrizen zutrifft), ein Multiplum der Einheitsmatrix ist.

Hieraus ergibt sich weiter, daß eine Matrix  $A$  existiert, so daß

$$A \alpha_\mu$$

hermitesch, wobei entweder  $A$  selbst oder  $iA$  ebenfalls hermitesch ist.<sup>1)</sup> Dies gibt Anlaß zur Bildung des Vektors

$$\alpha_\mu = \Psi^* A \alpha_\mu \Psi,$$

der reelle Komponenten besitzt. (Wir verwenden hier stets reelle Koordinaten.)

Das Transformationsgesetz der  $\Psi$  ist gekoppelt mit dem der  $\alpha_\mu$ , nämlich:

$$\alpha'_\mu = S^{-1} \alpha_\mu S, \quad A' = S^\dagger A S, \quad \Psi' = S^{-1} \Psi.$$

Unter diesen  $S$ -Transformationen gibt es spezielle, die einer 10gliedrigen Gruppe  $S(D_5)$  angehören, von derart, daß für jede die  $g_{\mu\nu}$  invariant lassende Koordinatentransformation

$$X'^\mu = a^\mu_{\nu} X^\nu,$$

die als *Drehung* bezeichnet werden kann, ein  $S$  aus  $D_5$  existiert, so daß mit

$$\alpha'_\nu = S \alpha_\nu S^{-1}, \quad A' = S^\dagger A S = A, \\ \alpha_\nu = S^{-1} \alpha'_\nu S = a^\mu_{\nu} \alpha'_\mu.$$

Es transformiert sich dann auch bei festen  $\alpha_\mu$

$$\alpha_\mu = \Psi^* A \alpha_\mu \Psi$$

mit

$$\Psi = S^{-1} \Psi$$

wie ein kovarianter Vektor. So hängen im Spezialfall der Drehungen die sonst voneinander unabhängigen  $S$ -Transformationen mit den Koordinatentransformationen zusammen.

Es ist oft als Einwand gegen diese Betrachtungsweise vorgebracht worden, es sei unnatürlich, ein Transformationsgesetz für die  $\Psi$  bei Drehungen einzuführen, dessen Koeffizienten davon abhängen, welche numerischen Werte den  $\alpha_\mu$  erteilt werden. Demgegenüber möchten wir hier die Auffassung vertreten, daß dieser Umstand doch als ganz natürlich erscheint, wenn wir die Idee des vierdimensionalen *Spinraumes* einführen. Dieser rührt daher, daß bei Angabe des Ortes des Elektrons noch vier mögliche Zustände existieren, charakterisiert durch vier linear unabhängige  $\Psi_e^{(r)}$  ( $\rho = 1 \dots 4$ );

$$\sum_r c_r \Psi_e^{(r)} = 0,$$

1) Eine Matrix  $a$  mit den Elementen  $a_{rs}$  heißt hermitesch, wenn  $a_{rs}$  konjugiert komplex zu  $a_{sr}$  ist ( $a_{rs} = a_{sr}^*$ ). Sie heißt symmetrisch, wenn  $a_{rs} = a_{sr}$ ; schief (oder antisymmetrisch), wenn  $a_{rs} = -a_{sr}$ . Mit  $a^\dagger$  wird die zu  $a$  hermitesch-konjugierte Matrix bezeichnet, definiert durch  $a_{rs}^\dagger = a_{sr}^*$ .

nur wenn alle  $c_r = 0$ . So wie beliebige Bezugssysteme im vierdimensionalen Raumzeit-Kontinuum erlaubt sind, sind auch noch beliebige Bezugssysteme im Spinraum zulässig, die außerdem von Ort zu Ort des Raumzeit-Kontinuums noch beliebig variieren können. Der methodische Gegensatz zum van der Waerdenschen Spinorkalkül, der sich aus dieser Auffassung ergibt, wird in § 3 erwähnt.

Die hier gegebene Begründungsweise der Spinoren des fünfdimensionalen Raumes bzw. der projektiven, von fünf homogenen Koordinaten abhängigen Spinoren und ihres Kalküls ist verschieden von der in der Literatur vorliegenden. Zunächst haben W. Pauli und J. Solomon<sup>1)</sup> die Existenz solcher Spinoren begründet und mit ihrer Hilfe die Diracschen Gleichungen mit der Einstein-Mayerschen Fassung der Feldtheorie in Verbindung zu bringen gesucht. Hierbei werden aber die Resultate formal wenig einheitlich und überdies wurden dort die „Beingrößen“  $h^{\mu}_{\nu}$  (im Anschluß an Fock und Weyl) explizite eingeführt, was die Formeln weiter kompliziert.

In der vorliegenden Arbeit ist dies vermieden, und zwar nach der (mit Verwendung gewöhnlicher inhomogener Koordinaten) von Schrödinger<sup>2)</sup> und Bargmann<sup>3)</sup> angegebenen Methode, die sich auf unseren Fall ohne weiteres übertragen läßt (§ 4). Insbesondere findet sich bei Bargmann zuerst die allgemeine Einführung der hier mit  $A$  bezeichneten hermitesierenden Matrix und ist dort zuerst die allgemeine Kovarianz der Gleichungen bei beliebigen  $S$ -Transformationen erreicht.

Unabhängig von Pauli und Solomon haben Schouten und van Dantzig<sup>4)</sup> das Problem der Spinoren und der Diracschen Gleichung untersucht, und zwar mit Verwendung von fünf homogenen Koordinaten. Der Kalkül und die Begründung der projektiven Spinoren in diesen Arbeiten kann wohl als schwer verständlich und unübersichtlich bezeichnet werden, da stets in einer die Übersicht erschwerenden Weise für die Ergebnisse unwesentliche, nur in speziellen Bezugs-

1) W. Pauli u. J. Solomon, Journ. de Phys. (7) **3**, S. 452 u. 582. 1932.

2) E. Schrödinger, Berl. Ber. S. 105. 1932.

3) V. Bargmann, Berl. Ber. S. 346. 1932.

4) Es geschieht dies erst für eine spezielle Wahl der Signatur der Metrik: J. A. Schouten u. D. van Dantzig, Ztschr. f. Phys. **78**, S. 639. 1932, daselbst ältere Literatur; ferner Ann. of Mathematics (2) **34**, S. 271. 1933. Später nach Kenntnis der Arbeit von Pauli-Solomon allgemein: J. A. Schouten, Ztschr. f. Phys. **81**, S. 129 u. 405. 1933.



systemen des Spinraumes geltende Eigenschaften der Matrizen benützt werden.

Dagegen haben wir die Form der Diracschen Gleichungen im § 5 der vorliegenden Arbeit von diesen Autoren übernommen. Der projektive Spinor  $\Psi$  wird hierbei gleichgesetzt:

$$\Psi = \psi F^l,$$

worin  $\psi$  ein gewöhnlicher (inhomogen-affiner) Spinor und  $F$  ein reeller Skalar vom Grad 1 ist. Um die Forderung der Reellität der Lagrangefunktion auf einfache Weise zu befriedigen, muß der Homogenitätsgrad  $l$  von  $\Psi$  als rein imaginär angenommen werden. (Im Falle symmetrischer  $F^{\lambda}_{\mu\nu}$ , auf den wir, wie in Teil I erörtert wurde, besonderen Wert legen, ergibt sich die dimensionslose Zahl  $l$  zu

$$l = i \frac{e}{h} \frac{1}{\sqrt{2\kappa}},$$

wenn  $e$  die Ladung des Teilchens,  $h$  die durch  $2\pi$  dividierte Plancksche Konstante und  $\kappa$  die Einsteinsche Gravitationskonstante bedeutet.)

Im § 6 wird versucht, durch Aneinanderreihung der zugehörigen Lagrangefunktionen die klassische Feldtheorie des Vakuums (diese entspricht der Abwesenheit von ponderabler Masse und Ladung) mit der Diracschen Theorie des Materiewellenfeldes zu verknüpfen. Zum Unterschied von der bisherigen Behandlung desselben Problems bei Pauli-Solomon und Schouten-van Dantzig bzw. Schouten gelingt es hier jedoch, einen formal einheitlichen Ausdruck für den symmetrischen Projektor  $T_{\mu\nu}$  aufzustellen, der den Energieimpulstensor  $T_{ik}$  und den Stromvektor  $v^i$  zusammenfaßt, § 10, Gl. (71). Hierbei scheint sich die Voraussetzung der Symmetrie der  $F^{\lambda}_{\mu\nu}$  besonders zu bewähren. In beiden Tensoren treten (wie dies auch bei Pauli-Solomon der Fall war, jedoch mit anderen numerischen Faktoren) zu  $\sqrt{\kappa}$  proportionale Zusatzglieder auf, die auch bei Abwesenheit von Gravitationsfeldern (spezielle Relativitätstheorie) nicht verschwinden. Diese Abweichung der entwickelten Theorie von der Diracschen dürfte sich jedoch wegen ihrer Kleinheit kaum durch Experimente prüfen lassen.

Die zuletzt entwickelte Theorie läßt sich auf die Wirklichkeit nicht direkt anwenden, sondern erst nach Quantisierung der Wellenfelder, die den Übergang in den Konfigurationsraum mit sich bringt. Wir gehen jedoch hier auf diesen weiteren Schritt, der ja übrigens das Problem der Selbst-

energie der materiellen Teilchen bekanntlich immer noch ungelöst zurückläßt, nicht näher ein.

Auch abgesehen von dem noch auszuführenden, zuletzt erwähnten Schritt geschieht die Verknüpfung des Materiewellenfeldes mit den klassischen Feldern (Gravitationsfeld und elektromagnetisches Feld) bei allen bisherigen Theorien „nur äußerlich und logisch willkürlich durch ein Pluszeichen“. Dies scheint damit zusammenzuhängen, daß bei den bisherigen Theorien (einschließlich der hier entwickelten) die Atomistik der elektrischen Ladung in den Grundlagen nicht richtig zur Geltung kommt.

## § 2. Aufbau des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ aus fünf Matrizen $\alpha_\mu$

Die Diracsche Theorie macht Gebrauch von der Existenz von vier vierreihigen Matrizen  $\overset{0}{\gamma}_k$ <sup>1)</sup>, die den Relationen

$$(1) \quad \frac{1}{2} (\overset{0}{\gamma}_i \overset{0}{\gamma}_k + \overset{0}{\gamma}_k \overset{0}{\gamma}_i) = \delta_{ik}$$

genügen und welche überdies hermitesch gewählt werden können. Werden alle im folgenden benützten Matrizen als vierreihig vorausgesetzt, so gelten die folgenden fundamentalen Sätze:

*Satz 1. Genügen vier andere (vierreihige) nicht notwendig hermitesche Matrizen  $\overset{0}{\gamma}'_k$  denselben Relationen (1), so gibt es eine Matrix  $S$  (mit nicht verschwindender Determinante), so daß gilt:*

$$(2) \quad \overset{0}{\gamma}'_k = S^{-1} \overset{0}{\gamma}_k S.$$

*Satz 2. Ist  $C$  eine (vierreihige) Matrix, die mit allen vier Matrizen kommutiert, so ist  $C$  ein Multiplum der Einheitsmatrix.*

Der erste Satz beruht darauf, daß alle Darstellungen vom Grad 4 des durch (1) definierten hyperkomplexen Zahlensystems miteinander äquivalent sind, der zweite Satz beruht darauf, daß alle diese Darstellungen vom Grad 4 irreduzibel sind.<sup>2)</sup>

Bildet man die Matrix

$$\overset{0}{\gamma}_5 = \overset{0}{\gamma}_1 \overset{0}{\gamma}_2 \overset{0}{\gamma}_3 \overset{0}{\gamma}_4,$$

1) Es laufen wieder die lateinischen Indizes von 1–4, die griechischen von 1–5.

2) Über den Beweis hierfür vgl. B. L. van der Waerden, Gruppentheoretische Methoden in der Quantentheorie. Berlin 1932. Vgl. insbes. S. 55.

so ist auch  $\gamma_5^0$  zugleich mit den  $\gamma_k^0$  hermitesch und genügt den Relationen

$$\gamma_5^0 \gamma_k^0 + \gamma_k^0 \gamma_5^0 = 0$$

$$(\gamma_5^0)^2 = I$$

(wobei mit  $I$  die Einheitsmatrix bezeichnet ist). Es gibt also im ganzen fünf vierreihige Matrizen  $\gamma_\mu^0$  (und übrigens nicht mehr als fünf derartige Matrizen), die den Relationen

$$(3) \quad \frac{1}{2}(\gamma_\mu^0 \gamma_\nu^0 + \gamma_\nu^0 \gamma_\mu^0) = \delta_{\mu\nu}$$

genügen. Die 16 linear unabhängigen Matrizen

$$I, \gamma_\mu^0 \quad \text{und} \quad \gamma_{[\mu\nu]}^0 \equiv \frac{1}{2}(\gamma_\mu^0 \gamma_\nu^0 - \gamma_\nu^0 \gamma_\mu^0)$$

bilden die Basis eines hyperkomplexen Zahlensystems.

Wir verallgemeinern nun dieses Ergebnis, indem wir erstens auch nicht hermitesche Matrizen zulassen, und zweitens entsprechend reellen Koordinaten die  $\delta_{\mu\nu}$  durch

$$(4) \quad g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = e_\mu \delta_{\mu\nu}$$

ersetzen, worin das Vorzeichen  $e_\mu = +1$  oder  $-1$  durch die Signatur der Metrik bestimmt wird. Es soll dann also gelten:

$$(5) \quad \frac{1}{2}(\alpha_\mu^0 \alpha_\nu^0 + \alpha_\nu^0 \alpha_\mu^0) = g_{\mu\nu} = e_\mu \delta_{\mu\nu}.$$

Ist  $e_\mu$  negativ, so erhält man eine Lösung von (5) aus dem  $\gamma_\mu^0$  von (3) durch Multiplikation mit  $i$  und umgekehrt. Wir beweisen zunächst, daß aus (5) folgt, daß das Produkt der fünf Matrizen  $\alpha_\mu^0$  gegeben ist durch

$$(6) \quad \alpha_1^0 \alpha_2^0 \alpha_3^0 \alpha_4^0 \alpha_5^0 = \pm \sqrt{\eta},$$

worin das Vorzeichen  $\eta = \pm 1$  durch

$$(7) \quad \eta = e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 = \text{Det} ||g_{\mu\nu}||$$

definiert ist. Denn dieses Matrizenprodukt kommutiert gemäß

(5) mit allen  $\alpha_\mu^0$ , ist daher nach Satz 2 ein Multiplum der Einheitsmatrix, ferner ist ebenfalls gemäß (5) das Quadrat des Matrizenproduktes gleich  $\eta$ .

Wir können nun die Verallgemeinerung der Sätze 1 und 2 für den Fall von fünf Matrizen  $\alpha_\mu^0$  angeben.

Satz 1a. Genügen die  $\overset{0}{\alpha}_\mu$  den Relationen (5) und sind  $\overset{0}{\alpha}'_\mu$  fünf andere Matrizen, die denselben Relationen (5) genügen, so gibt es eine Matrix  $S$  mit nicht verschwindender Determinante, so daß entweder

$$(2a) \quad \overset{0}{\alpha}'_\mu = S^{-1} \overset{0}{\alpha}_\mu S$$

oder

$$(2b) \quad \overset{0}{\alpha}'_\mu = -S^{-1} \overset{0}{\alpha}_\mu S.$$

Und zwar gilt die erste oder zweite Gleichung, je nachdem

$$\overset{0}{\alpha}'_1 \overset{0}{\alpha}'_2 \overset{0}{\alpha}'_3 \overset{0}{\alpha}'_4 \overset{0}{\alpha}'_5 = + \overset{0}{\alpha}_1 \overset{0}{\alpha}_2 \overset{0}{\alpha}_3 \overset{0}{\alpha}_4 \overset{0}{\alpha}_5$$

oder

$$\overset{0}{\alpha}'_1 \overset{0}{\alpha}'_2 \overset{0}{\alpha}'_3 \overset{0}{\alpha}'_4 \overset{0}{\alpha}'_5 = - \overset{0}{\alpha}_1 \overset{0}{\alpha}_2 \overset{0}{\alpha}_3 \overset{0}{\alpha}_4 \overset{0}{\alpha}_5.$$

Es folgt dies unmittelbar durch Anwendung von Satz 1 auf die ersten vier Matrizen und darauffolgende Anwendung von (6). Im Falle von vier Matrizen  $\overset{0}{\alpha}_k$  kann sowohl erreicht werden, daß

$$\overset{0}{\alpha}'_k = + S^{-1} \overset{0}{\alpha}_k S$$

als auch (durch andere Wahl von  $S$ , sagen wir durch Ersetzen von  $S$  durch  $\Sigma$ )

$$\overset{0}{\alpha}'_k = - \Sigma^{-1} \overset{0}{\alpha}_k \Sigma,$$

während im Falle von fünf Matrizen  $\overset{0}{\alpha}_\mu$ , wie aus (6) hervorgeht, nur eine der beiden Gl. (2a) oder (2b) erfüllt werden kann. Die (bereits benützte) Verallgemeinerung von Satz 2 für

fünf Matrizen  $\overset{0}{\alpha}_\mu$  ist trivial und lautet:

Satz 2a. Ist  $C$  eine vierreihige Matrix, die mit vier von den fünf Matrizen  $\overset{0}{\alpha}_\mu$  kommutiert, so kommutiert sie auch mit der fünften und ist ein Multiplum der Einheitsmatrix.

Wir können nun von den speziellen Werten  $\overset{0}{g}_{\mu\nu}$  des metrischen Tensors zu den allgemeinen  $g_{\mu\nu}$  übergehen vermöge der Bemerkung, daß durch Wahl geeigneter fester reeller Koeffizienten  $h^{\mu}_{\nu}$ , gemäß

$$\alpha_\mu = h^{\nu}_{\mu} \overset{0}{\alpha}_\nu$$

aus jeder Lösung von (5) eine Lösung von

$$(8) \quad \frac{1}{2}(\alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu) = g_{\mu\nu}$$

hervorgeht, und umgekehrt aus jeder Lösung von (8) gemäß der umgekehrten Transformation

$$\overset{0}{\alpha}_\mu = h^\nu_{\cdot\mu} \alpha_\nu \quad (h^\lambda_{\cdot\mu} h^\nu_{\cdot\lambda} = \delta^\nu_\mu)$$

eine Lösung von (5) hervorgeht. Naturgemäß müssen wir aber voraussetzen, daß die quadratische Form

$$g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu$$

aus der Form

$$\overset{0}{g}_{\mu\nu} \overset{0}{X}^\mu \overset{0}{X}^\nu = \sum_\nu e_\nu (\overset{0}{X}^\nu)^2$$

durch stetige Abänderung der Koordinaten erzeugt werden kann, d. h. daß die Funktionaldeterminante

$$\left\| \frac{\partial X^\mu}{\partial \overset{0}{X}^\nu} \right\|$$

positiv, insbesondere also nicht Null ist. Dadurch sind z. B. Spiegelungen einer ungeraden Zahl von Koordinaten ausgeschlossen. Die Determinante

$$g = \text{Det} \| g_{\mu\nu} \| \neq 0$$

verschwindet nicht und hat dasselbe Vorzeichen  $\eta$  wie die der  $\overset{0}{g}_{\mu\nu}$ . Wir bemerken noch, daß durch Heraufziehen der Indizes aus den  $\alpha_\mu$  die Matrizen

$$(9) \quad \alpha^\mu = g^{\mu\nu} \alpha_\nu$$

gebildet werden können, die den Relationen

$$(8a) \quad \frac{1}{2} (\alpha^\mu \alpha^\nu + \alpha^\nu \alpha^\mu) = g^{\mu\nu},$$

$$(8b) \quad \frac{1}{2} (\alpha^\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha^\mu) = \delta^\mu_\nu$$

genügen.

Wir können nun alle Sätze vom Fall der Relationen (5) auf den der Relationen (8) übertragen. An Stelle von  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5$  tritt die antisymmetrische Bildung

$$(10) \quad \alpha_{[12345]} \equiv \frac{1}{5!} \sum_P \varepsilon_P \alpha_{\mu_1} \alpha_{\mu_2} \alpha_{\mu_3} \alpha_{\mu_4} \alpha_{\mu_5},$$

worin  $P$  die Permutation ist, die 1, 2, 3, 4, 5 in die stets voneinander verschiedenen Ziffern  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$  überführt und  $\varepsilon_P = +1$  oder  $-1$ , je nachdem  $P$  gerade oder ungerade ist;

über alle Permutationen  $P$  ist zu summieren. Dann gilt an Stelle von (6)

$$(11) \quad \alpha_{[12345]} = \pm \sqrt{g} = \pm \sqrt{\eta} \sqrt{|g|}.$$

Es gelten nun die zu den Sätzen 1a und 2a völlig analogen allgemeineren Sätze:

*Satz 1b. Genügen die  $\alpha_\mu$  den Relationen (8) und sind  $\alpha'_\mu$  fünf andere Matrizen, die denselben Relationen (8) genügen, so gibt es eine Matrix  $S$  mit nicht verschwindender Determinante, so daß entweder*

$$(12a) \quad \alpha'_\mu = S^{-1} \alpha_\mu S$$

oder

$$(12b) \quad \alpha'_\mu = -S^{-1} \alpha_\mu S,$$

und zwar gilt die erste oder die zweite Gleichung, je nachdem

$$\alpha'_{[12345]} = + \alpha_{[12345]}$$

oder

$$\alpha'_{[12345]} = - \alpha_{[12345]}.$$

Ferner:

*Satz 2b. Ist eine Matrix  $C$  mit vier von den die Relation (8) befriedigenden Matrizen  $\alpha_\mu$  vertauschbar, so ist sie auch mit der fünften Matrix  $\alpha_\mu$  vertauschbar und gleicht einem Multiplum der Einheitsmatrix.*

Da wir ausdrücklich die Hermitizität der  $\alpha_\mu$  nicht vorausgesetzt haben, wollen wir nun die hermitesch konjugierten  $\alpha_\mu^\dagger$  der  $\alpha_\mu$  untersuchen. Wie man aus (8) sofort entnimmt, genügen sie wegen der Reellität der  $g_{\mu\nu}$  ebenfalls den Gl. (8)

$$(8 \dagger) \quad \frac{1}{2} (\alpha_\mu^\dagger \alpha_\nu^\dagger + \alpha_\nu^\dagger \alpha_\mu^\dagger) = g_{\mu\nu}.$$

Ferner ist<sup>1)</sup> gemäß (11)

$$(13) \quad \alpha_{[12345]}^\dagger = (\alpha_{[12345]})^\dagger = \eta \alpha_{[12345]},$$

worin  $\eta$  das Vorzeichen der Determinante  $g$  ist. Also folgt aus Satz 1b:

*Satz 3. Genügen die  $\alpha_\mu$  den Relationen (8), so gibt es eine Matrix  $A$  mit nicht verschwindender Determinante, so daß*

$$(14) \quad \alpha_\mu^\dagger = \eta A \alpha_\mu A^{-1}.$$

<sup>1)</sup> Man beachte, daß  $12345 \rightarrow 54321$  eine gerade Permutation ist.

Diese Matrix  $A$  wird im folgenden eine fundamentale Rolle spielen.<sup>1)</sup> Zunächst folgt aus Satz 2b, daß  $A$  durch die Gl. (4) bis auf ein Multiplum der Einheitsmatrix, d. h. einen Zahlfaktor eindeutig bestimmt ist. Die Determinante der Matrix  $A$ :

$$(15) \quad a = \text{Det } A,$$

kann also noch beliebig normiert werden, nur darf sie nicht verschwinden.

Durch Übergang zur hermitesch konjugierten Matrix, folgt aus (14)

$$(14 \dagger) \quad \alpha_\mu = \eta A^{\dagger -1} \alpha_\mu^\dagger A^\dagger,$$

also

$$\alpha_\mu = A^{\dagger -1} (A \alpha_\mu A^{-1}) A^\dagger$$

oder

$$\alpha_\mu A^{\dagger -1} A = A^{\dagger -1} A \alpha_\mu.$$

Nach Satz 2b ist also  $A^{\dagger -1} A$  ein Multiplum der Einheitsmatrix, d. h.

$$A^\dagger = c A.$$

Es folgt hieraus zunächst nur wegen  $A = c^* A^\dagger = c^* c A$ , daß  $c^* c = 1$ . Wir wollen weitergehend  $A$  so normieren, daß

$$(16) \quad A^\dagger = \eta A,$$

dann wird nämlich  $A \alpha_\mu$  hermitesch:

$$(17) \quad (A \alpha_\mu)^\dagger = A \alpha_\mu.$$

In der Tat gilt dann

$$(A \alpha_\mu)^\dagger = \alpha_\mu^\dagger A^\dagger = \eta \alpha_\mu^\dagger A = A \alpha_\mu A^{-1} A = A \alpha_\mu.$$

Vermöge der Normierung (16) ist der in (15) eingeführte Wert  $a$  der Determinante von  $A$  reell:

$$(15 \dagger) \quad a = a^*.$$

### § 3. Koordinaten- und S-Transformationen

Wir betrachten nun diejenige Gruppe von Koordinatentransformationen

$$(18) \quad X'^\mu = a^\mu_\nu X^\nu,$$

1) Sie wurde zuerst von V. Bargmann, Berl. Ber. 1932, S. 345 eingeführt, allerdings unter Benützung einer speziellen Lösung von (8). — In der Arbeit von W. Pauli u. J. Solomon (a. a. O.) wurden für die Matrizen  $A \alpha_\mu$  gewisse  $A \alpha_\mu A \alpha_\nu$  und  $A \alpha_\nu A \alpha_\mu$  verknüpfende Relationen angesetzt, die aber eine unnötige Einschränkung der Allgemeinheit darstellen.



welche die Werte der  $g_{\mu\nu}$  in der invarianten Form

$$g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu$$

festlassen. Die  $a_{\nu}^{\mu}$  müssen dann die Bedingungen

$$(19) \quad g_{\sigma\rho} a_{\nu}^{\sigma} a_{\mu}^{\rho} = g_{\mu\nu}$$

erfüllen. Abgesehen von der Bedingung (19) sei die Abhängigkeit der  $a_{\nu}^{\mu}$  von den  $X^{\lambda}$  homogen vom nullten Grad und sonst beliebig. Diese Gruppe kann als eine Verallgemeinerung der orthogonalen Gruppe aufgefaßt werden. Wir wollen sie als *Drehgruppe* bezeichnen. Es gilt dann auch

$$(19a) \quad a_{\sigma}^{\mu} a_{\rho}^{\nu} g^{\sigma\rho} = g^{\mu\nu}.$$

Setzen wir nun

$$(20a) \quad a'^{\mu} = a_{\nu}^{\mu} a^{\nu},$$

$$(20b) \quad a_{\nu}^{\mu} a'_{\mu} = a_{\nu},$$

so folgt aus (19)

$$\frac{1}{2} (a'^{\mu} a'^{\nu} + a'^{\nu} a'^{\mu}) = \frac{1}{2} (a^{\mu} a^{\nu} + a^{\nu} a^{\mu}) = g^{\mu\nu},$$

$$\frac{1}{2} (a'_{\mu} a'_{\nu} + a'_{\nu} a'_{\mu}) = \frac{1}{2} (a_{\mu} a_{\nu} + a_{\nu} a_{\mu}) = g_{\mu\nu}.$$

Nach Satz 1 b folgt also:

**Satz 4.** Genügen die Koeffizienten  $a_{\nu}^{\mu}$  der Bedingung (19) der Invarianz der  $g_{\mu\nu}$ , so gibt es eine Matrix  $S$  derart, daß

$$(21a) \quad S^{-1} a^{\mu} S = a_{\nu}^{\mu} a^{\nu},$$

$$(21b) \quad a_{\nu}^{\mu} S^{-1} a_{\mu} S = a_{\nu}.$$

Das  $+$ -Zeichen gilt hierin, wenn wir die Determinante der  $a_{\nu}^{\mu}$  [die nach (19) notwendig  $+1$  oder  $-1$  ist] als gleich  $+1$  annehmen, also eigentliche Drehungen betrachten.

Durch (21) ist  $S$  allerdings zunächst nur bis auf einen multiplikativen Zahlfaktor bestimmt. Wir können diesen festlegen durch die Forderung, daß

$$\text{Det } S = 1$$

sein soll und daß überdies  $S$  stetig aus der Einheitsmatrix hervorgehen soll, wenn die Drehung  $a_{\nu}^{\mu}$  stetig aus der Identität hervorgeht.

Bei dieser Festlegung von  $S$  ergibt die Zuordnung

$$(a_{\nu}^{\mu}) \rightarrow S$$

eine vierreihige Darstellung der Drehgruppe des fünfdimensionalen Raumes. Denn der Aufeinanderfolge zweier Transformationen  $(a''_{\nu})$   $(a'_{\nu})$  entspricht die Multiplikation der zugeordneten Matrizen  $S$  und  $S'$ . Wir bezeichnen die Gesamtheit dieser speziellen  $S$ -Matrizen mit  $D_5(g_{\mu\nu})$ .

Eine vierkomponentige Größe  $\Psi$ , die sich bei Drehungen transformiert gemäß

$$\Psi'_r = \sum_s S_{rs} \Psi_s$$

oder in Matrixform

$$(22) \quad \Psi' = S \Psi$$

nennen wir einen  $\Psi$ -Spinor (des Fünfertraumes); eine vierkomponentige Größe  $\Phi_r$  die sich hierbei transformiert gemäß

$$\Phi'_r = \sum_s S_{rs}^{-1} \Phi_s$$

oder in Matrixform

$$(22a) \quad \Phi' = \Phi S^{-1}$$

nennen wir einen  $\Phi$ -Spinor. Hierbei ist  $\Psi$  als Matrix mit einer Spalte,  $\Phi$  als Matrix mit einer Zeile zu denken. Es bildet dann

$$(23) \quad a = \Phi \Psi$$

einen Skalar und

$$(23a) \quad a^\mu = \Phi a^\mu \Psi$$

einen Fünfervektor, und zwar

1. bei festen  $a^\mu$  und Spinortransformationen der  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,

2. bei festen  $\Phi$ ,  $\Psi$  und Vektortransformationen der  $a^\mu$ .

Diese doppelte Kovarianzeigenschaft des Vektors  $a^\mu$  ist für die physikalische Anwendung wesentlich.

Die Komponenten des so gebildeten Fünfervektors  $a^\mu$ , sowie der Skalar  $a$  sind im allgemeinen nicht reell. Um reelle Fünfervektoren zu bekommen, bemerken wir, daß nach Satz 3 eine Matrix  $A$  existiert, so daß

$$A a_\mu$$

hermitesch. Nun ist zugleich mit  $A a_\mu$  auch  $A a'_\mu$  hermitesch, da die Koeffizienten  $a''_{\nu}$  in (21a) reell sind. Also ist

$$\eta A a_\mu A^{-1} = a_\mu^\dagger,$$

$$\eta A a'_\mu A^{-1} = a_\mu'^\dagger,$$

$$\eta A S a'_\mu S^{-1} A^{-1} = S^{\dagger-1} a_\mu'^\dagger S^\dagger = \eta S^{\dagger-1} A a'_\mu A^{-1} S^\dagger,$$

$$A^{-1} S^\dagger A S a'_\mu = a_\mu' A^{-1} S^\dagger A S,$$

also ist nach Satz 2b

$$S^\dagger A S = c A.$$

Da die Determinante von  $S$  gleich Eins ist, folgt  $c^4 = 1$  und da  $c$  sich stetig mit den Koeffizienten  $\alpha^\mu_{\nu}$  ändern muß und für  $S = I$ ,  $c = 1$  wird, folgt allgemein  $c = 1$ :

$$(24) \quad S^\dagger A S = A$$

für alle  $S$  aus  $D_5(g_{\mu\nu})$ . Wegen

$$\psi'^* = \psi'^* S^\dagger,$$

folgt

$$(25) \quad \psi'^* A = \psi'^* S^\dagger A = (\psi'^* A) S^{-1},$$

also ist

$$\psi'^* A = \Phi$$

ein  $\Phi$ -Spinor. Der Skalar

$$(26) \quad a = \psi'^* A \psi$$

ist nun reell und der Fünfervektor

$$(26a) \quad a^\mu = \psi'^* A \alpha^\mu \psi$$

hat reelle Komponenten, da  $A \alpha^\mu$  hermitesch ist. Die Matrix  $A$  dient also wesentlich dazu, um aus den Spinoren  $\psi$  reelle Skalare und Vektoren bilden zu können.

Wir wollen noch die Lösung für die die Gl. (21) befriedigende Matrix  $S$  angeben, wenn es sich um infinitesimale Transformationen (18) der  $X^\mu$  handelt. Es gilt dann also

$$(18') \quad X^{\mu'} = X^\mu + \epsilon^\mu_{\nu} X^\nu,$$

worin  $\epsilon^\mu_{\nu}$  als klein von erster Ordnung betrachtet wird. Die Bedingung (19) nimmt die Form an

$$g_{\rho\nu} \epsilon^\rho_{\mu} + g_{\mu\sigma} \epsilon^\sigma_{\nu} = 0$$

oder mit der üblichen Definition des Herunterziehens des Index

$$(19') \quad \epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}.$$

Die zu lösende Gl. (21a) nimmt bei dem Ansatz

$$S = I + T,$$

wo  $T$  von erster Ordnung ist, die Form an

$$\alpha^\mu T - T \alpha^\mu = \epsilon^\mu_{\nu} \alpha^\nu$$

oder

$$\alpha_\mu T - T \alpha_\mu = \epsilon_{\mu\nu} \alpha^\nu.$$

Setzen wir noch

$$T = \epsilon_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta},$$

wobei, um (19') Rechnung zu tragen

$$T^{\alpha\beta} = -T^{\beta\alpha}$$

gesetzt ist und über  $\alpha$  und  $\beta$  unabhängig zu summieren ist, so wird wegen

$$\varepsilon_{\mu\nu} \alpha^\nu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} (\delta_{\mu}^{\alpha} \alpha^{\beta} - \delta_{\mu}^{\beta} \alpha^{\alpha}),$$

$$(21') \quad \alpha_{\mu} T^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta} \alpha_{\mu} = \frac{1}{2} (\delta_{\mu}^{\alpha} \alpha^{\beta} - \delta_{\mu}^{\beta} \alpha^{\alpha}).$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{8} (\alpha^{\alpha} \alpha^{\beta} - \alpha^{\beta} \alpha^{\alpha}) = \frac{1}{4} \alpha^{[\alpha\beta]}.$$

Es gilt nämlich mit Rücksicht auf (8b)

$$\frac{1}{2} (\alpha_{\mu} \alpha^{\alpha} \alpha^{\beta} - \alpha^{\alpha} \alpha^{\beta} \alpha_{\mu}) = \frac{1}{2} (\alpha_{\mu} \alpha^{\alpha} + \alpha^{\alpha} \alpha_{\mu}) \alpha^{\beta} - \alpha^{\alpha} \frac{1}{2} (\alpha_{\mu} \alpha^{\beta} + \alpha^{\beta} \alpha_{\mu})$$

$$= \delta_{\mu}^{\alpha} \alpha^{\beta} - \delta_{\mu}^{\beta} \alpha^{\alpha}.$$

Also wird schließlich

$$(27) \quad S = I + \frac{1}{4} \varepsilon_{\alpha\beta} \alpha^{[\alpha\beta]}$$

mit

$$(28) \quad \alpha^{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2} (\alpha^{\alpha} \alpha^{\beta} - \alpha^{\beta} \alpha^{\alpha}).$$

Was die allgemeinste Lösung von (21') betrifft, so ist zu bemerken, daß sie sich nach Satz 2b von irgendeiner speziellen Lösung durch den additiven Zusatz

$$C^{\alpha\beta} \cdot I$$

unterscheidet. Die angeschriebene Partikularlösung ist dadurch eindeutig ausgezeichnet, daß die Spur von  $S - I$  verschwindet (da, wie leicht zu zeigen ist, dies für die Spur von  $\alpha^{[\alpha\beta]}$  der Fall ist). Dies bedeutet aber, daß bei den Größen erster Ordnung in den  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  einschließlich die Det  $S$  unverändert gleich Eins bleibt (wegen der Gruppeneigenschaft folgt das dann allgemein streng), im Einklang mit der früher aufgestellten Bedingung.

Es möge darauf hingewiesen werden, daß bei der Untergruppe der Drehungen, die  $X^5$  festlassen, die also den Drehungen des vierdimensionalen Raumes entsprechen, die Matrix  $\alpha^5$  festbleibt. Wegen  $(\alpha^5)^2 = g^{55}$  und Spur  $(\alpha^5) = 0$  hat  $\alpha^5$  die Eigenwerte  $+\sqrt{g^{55}}$ ,  $+\sqrt{g^{55}}$ ,  $-\sqrt{g^{55}}$ ,  $-\sqrt{g^{55}}$ . Da nach (21) in diesem Fall  $S$  mit  $\alpha^5$  vertauschbar ist, zerfällt  $S$  in zwei Teilmatrizen sobald  $\alpha^5$  auf die Diagonalform gebracht wird; die vierkomponentige Größe  $\Psi$  zerfällt dann in zwei

zweikomponentige, die sich je unter sich transformieren. Diese Zerfällung liegt dem van der Waerdenschen Spinorkalkül zugrunde, wobei überdies die Matrizen  $\alpha^\mu$  noch weiter spezialisiert werden.<sup>1)</sup> Im Falle der fünfdimensionalen Drehungen hört die Möglichkeit, die vierkomponentigen Größen in zwei zweikomponentige Größen zu zerlegen, zu bestehen auf.

Der Spinorkalkül erscheint wohl natürlich, wenn man direkt von den möglichen Darstellungen der Drehgruppe ausgehen will, ohne Relationen der Form (1) [bzw. (5) und (8)] zu betrachten. Indessen erscheint es uns naturgemäßer, die Relationen (8) direkt als Ausgangspunkt zu benützen, wie dies dem ursprünglichen Ansatz von Dirac entspricht. Von diesem Standpunkt aus ist es konsequent, daß die das Transformationsgesetz der  $\Psi$  bestimmende Matrix  $S$  hinsichtlich ihrer numerischen Realisierung von derjenigen der Matrizen  $\alpha_\mu$  abhängt.

Wir bezeichnen eine bestimmte — mit den Relationen (8) im Einklang befindliche — numerische Realisierung der Matrizen  $\alpha_\mu$  als *Bezugssystem im (vierdimensionalen) Spinraum*. Konsequenterweise muß dann von einer physikalischen Theorie gefordert werden, daß sie nicht nur kovariant ist gegenüber einer beliebigen Koordinatentransformation in der Raumzeitwelt, bzw. allgemeiner einer homogenen Transformation der fünf Koordinaten  $X^\mu$  — sondern auch, daß sie gegenüber beliebigen [mit (8) verträglichen] Transformationen des Bezugssystems des Spinraumes kovariant ist. Diese Forderung steht in methodischem Gegensatz zum van der Waerdenschen Spinorkalkül, der auf einer Spezialisierung des Bezugssystems im Spinraum beruht.

Die allgemeinsten Transformationen des Bezugssystems im Spinraum, die wir auch als *S-Transformationen* bezeichnen, sind gegeben durch

$$(29) \quad \alpha'_\mu = S^{-1} \alpha_\mu S$$

und

$$(30) \quad \Psi' = S^{-1} \Psi, \quad \Phi' = \Phi S.$$

Dann bleiben nämlich sowohl die  $g_{\mu\nu}$  als auch der Skalar

$$a = \Phi \Psi$$

und der Vektor

$$a^\mu = \Phi \alpha^\mu \Psi$$

1) Die allgemein kovariante Form der Diracschen Wellengleichung im gewöhnlichen vierdimensionalen Kontinuum ist von diesem Standpunkt aus von B. L. van der Waerden u. L. Infeld, Berl. Ber. 1933, S. 380 behandelt.

bei  $S$ -Transformationen invariant. [Aus diesem formalen Grund wurde jetzt das Transformationsgesetz der  $\Phi$  und  $\Psi$  gegenüber (22), (22a) dadurch abgeändert, daß  $S$  durch  $S^{-1}$  ersetzt wurde.] Man sieht ferner, daß das Transformationsgesetz

$$(31) \quad A' = S^\dagger A S$$

der Forderung genügt, daß die Aussagen

$$\alpha_\mu^\dagger = \eta A \alpha_\mu A^{-1},$$

$$A^\dagger = \eta A,$$

$$A \alpha_\mu \text{ hermitesch,}$$

$$\Psi^\dagger A \text{ ist ein } \Phi\text{-Spinor,}$$

bei den  $S$ -Transformationen invariant bleiben (d. h. auch für die gestrichenen Größen gelten). Bei allen diesen Aussagen bleibt die *Abhängigkeit der Matrix  $S$  von den  $X^\mu$*  zunächst beliebig. Wenn die  $X^\mu$  als homogene Koordinaten aufgefaßt werden, scheint es allerdings konsequent,  $S$  als homogen vom Grad Null anzunehmen, damit der Homogenitätsgrad von  $\Psi$  und  $\Phi$  bei den  $S$ -Transformationen (30) invariant bleibt.

Zunächst scheinen die  $S$ -Transformationen und die (homogenen) Transformationen der  $X^\mu$  gänzlich unabhängig voneinander zu sein. Nach dem früher bewiesenen besteht jedoch ein, auch vom physikalischen Standpunkt aus notwendiger, Zusammenhang zwischen speziellen Koordinatentransformationen und speziellen  $S$ -Transformationen, nämlich den Drehungen im  $X^\mu$ -Raum und den  $S$ -Transformationen aus  $D_3$ .<sup>1)</sup> Das frühere Ergebnis kann nämlich, wenn wir uns in (30) für  $S$  diejenige Matrix eingesetzt denken, die zu der zu  $X^{\mu'} = a^\mu{}_{\nu'} X^\nu$  inversen Drehung gehört, folgendermaßen formuliert werden. *Zu jeder Drehung des Koordinatenraumes gibt es eine eindeutig zugeordnete  $S$ -Transformation aus  $D_3$ , derart, daß bei simultaner Durchführung der Drehung und der  $S$ -Transformation die  $\alpha^\mu$  fest bleiben.* Dieser Sachverhalt ist deshalb physikalisch notwendig, weil bei gegebenen  $g_{\mu\nu}$  (z. B. in der speziellen Relativitätstheorie) kein Koordinatensystem durch besondere Wahl der  $\alpha^\mu$  ausgezeichnet sein darf.<sup>2)</sup>

1) Hierbei besteht zwischen den Drehungen in verschiedenen Raumzeitpunkten, im Gegensatz zur früheren Einsteinschen Idee des Fernparallelismus, keinerlei Bindung.

2) Die Arbeit von T. Levi-Civita, Berl. Ber. 1933, S. 240 be ruht ausschließlich auf einem Übersehen dieses Sachverhaltes und ist deshalb für die Physik inakzeptabel. Überdies fehlt eine Vorschrift zur Bildung eines reellen Vektors.

Eine weitere Eigenschaft der  $S$ -Transformationen aus  $D_5$  ergibt sich durch Vergleich von (24) und (31): Bei den  $S$ -Transformationen aus  $D_5$  bleibt die Matrix  $A$  invariant. Die Matrix  $A$  kann als eine Art Fundamentaltensor des Spinraumes angesehen werden, da sie bei  $S$ -Transformationen analoge Eigenschaften hat wie die  $g_{\mu\nu}$  bei Koordinatentransformationen. (Über eine weitere Analogie vgl. die folgenden Paragraphen.) Die Anzahl der unabhängigen reellen Elemente von  $A$  ist mit Rücksicht auf (16) gleich  $4^2 = 16$ , gegenüber den  $\frac{5 \cdot 6}{2} = 15$  unabhängigen Komponenten der  $g_{\mu\nu}$ .

Anhangsweise sei hier bemerkt, daß es neben der Matrix  $A$  noch eine andere zu  $A$  analoge Matrix  $B$  im Spinraum gibt, die ebenfalls bei  $S$ -Transformationen aus  $D_5$  invariant bleibt; allerdings spielt sie bei den physikalischen Anwendungen keine Rolle. Man erhält sie, indem man statt der hermiteschen Konjugierten  $\alpha_\mu^\dagger$  die transponierten („gestürzten“) Matrizen  $\bar{\alpha}_\mu$  betrachtet, bei denen Zeilen und Kolonnen vertauscht sind. Denn diese genügen ebenfalls den Relationen

$$(8^*) \quad \text{Da} \quad \frac{1}{2} (\bar{\alpha}_\mu \bar{\alpha}_\nu + \bar{\alpha}_\nu \bar{\alpha}_\mu) = g_{\mu\nu}.$$

$$\bar{\alpha}_{[12345]} = (\alpha_{[12345]}) = \alpha_{[12345]},$$

folgt die Existenz einer Matrix  $B$ , so daß

$$(14^*) \quad \bar{\alpha}_\mu = B \alpha_\mu B^{-1}$$

(diesmal ohne das Vorzeichen  $\eta$ ). Durch diese Gleichung ist  $B$  bis auf einen Zahlenfaktor bestimmt, so daß

$$(15^*) \quad b = \text{Det } B$$

noch willkürlich bleibt. Aus (14<sup>\*</sup>) (folgt analog wie früher bei  $A$ ), daß  $B^{-1} \bar{B}$  mit den  $\alpha_\mu$  kommutiert, also:

$$\bar{B} = c B.$$

Man zeigt ohne weiteres, daß  $c^2 = 1$ , also  $c = \pm 1$ , d. h.

$$\bar{B} = +B \quad \text{oder} \quad \bar{B} = -B,$$

im ersten Fall ist  $B$  symmetrisch, im zweiten schief. Um zwischen diesen beiden Möglichkeiten zu entscheiden, bedarf es einer näheren Überlegung.<sup>1)</sup>

Aus (14<sup>\*</sup>) folgt:

$$\bar{\alpha}_\mu \bar{\alpha}_\nu = B \alpha_\mu \alpha_\nu B^{-1},$$

also mit

$$\alpha_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} (\alpha_\mu \alpha_\nu - \alpha_\nu \alpha_\mu),$$

wegen

$$\bar{\alpha}_{[\mu\nu]} = -\frac{1}{2} (\bar{\alpha}_\mu \bar{\alpha}_\nu - \bar{\alpha}_\nu \bar{\alpha}_\mu),$$

$$\bar{\alpha}_{[\mu\nu]} = -B \alpha_{[\mu\nu]} B^{-1}$$

1) Ich verdanke die Mitteilung dieser Überlegung, sowie die freundliche Erlaubnis, sie hier publizieren zu dürfen, Herrn Haantjes, Delft.



und mit

$$\bar{B} = \pm B, \quad (\overline{B \alpha_{[\mu\nu]}}) = \bar{\alpha}_{[\mu\nu]} \bar{B} = \mp B \alpha_{[\mu\nu]}.$$

Wir beweisen nun, daß die  $B \alpha_{[\mu\nu]}$  nicht schief sein können. Da die 10 Matrizen  $\alpha_{[\mu\nu]}$  linear unabhängig sind (d. h. aus  $c^{[\mu\nu]} \alpha_{[\mu\nu]} = 0$  mit gewöhnlichen Zahlen  $c^{[\mu\nu]}$  folgt  $c^{[\mu\nu]} = 0$ ) gilt dasselbe von den 10 Matrizen  $B \alpha_{[\mu\nu]}$ . Es gibt aber nur sechs linear unabhängige vierreihige schiefe Matrizen, dagegen 10 lineare unabhängige vierreihige symmetrische Matrizen. Also müssen die  $B \alpha_{[\mu\nu]}$  symmetrische Matrizen sein, d. h. es gilt das untere Zeichen:

$$(B \alpha_{[\mu\nu]}) = + B \alpha_{[\mu\nu]},$$

daher

$$(16^*) \quad \bar{B} = -B.$$

Die Matrix  $B$  ist schief. Die sechs Matrizen

$$B, B \alpha_\mu$$

bilden eine Basis aller vierreihigen schiefen Matrizen, die 10 Matrizen

$$B \alpha_{[\mu\nu]}$$

bilden eine Basis aller vierreihigen symmetrischen Matrizen.

Da bei  $S$  aus  $D_5$

$$B \alpha'_\mu = B S^{-1} \alpha_\mu S$$

zugleich mit  $B \alpha_\mu$  schief ist, folgt auf einem analogen Wege wie beim Beweis von (24):

$$(24^*) \quad \bar{S} B S = B$$

für alle  $S$  aus  $D_5$ .

Das allgemeine Transformationsgesetz von  $B$  bei  $S$ -Transformationen ist

$$(31^*) \quad B' = \bar{S} B S,$$

denn dann ist

$$B' \alpha'_\mu = \bar{S} B S (S^{-1} \alpha_\mu S) = \bar{S} B \alpha_\mu S$$

zugleich mit  $B \alpha_\mu$  schief.

#### § 4. Kovariante Differentiation der Spinoren

Aus den Relationen

$$\frac{1}{2} (\alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu) = g_{\mu\nu}$$

folgt durch Differentiation

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial X^e} \alpha_\nu + \alpha_\mu \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial X^e} + \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial X^e} \alpha_\mu + \alpha_\nu \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial X^e} \right) = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial X^e}.$$

Da

$$g_{\mu\nu;e} \equiv \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial X^e} - \Gamma_{\mu e}^\sigma g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\nu e}^\sigma g_{\mu\sigma} = 0,$$

folgt, daß die zur Abkürzung mit  $Y_{\mu e}$  bezeichneten Matrizen

$$Y_{\mu e} = \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial X^e} - \Gamma_{\mu e}^\sigma \alpha_\sigma$$

den Gleichungen

$$Y_{\mu e} \alpha_\nu + \alpha_\nu Y_{\mu e} + Y_{\nu e} \alpha_\mu + \alpha_\mu Y_{\nu e} = 0$$

genügen. Dies ist gleichbedeutend damit, daß die Matrizen

$$\alpha'_\mu = \alpha_\mu + \varepsilon Y_{\mu e}$$

(man kann unter den  $\varepsilon$  z. B.  $\varepsilon \frac{dX^e}{ds}$  längs einer Kurve verstehen) bis einschließlich Größen erster Ordnung in  $\varepsilon$  die Gleichungen

$$\frac{1}{2} (\alpha'_\mu \alpha'_\nu + \alpha'_\nu \alpha'_\mu) = g_{\mu\nu}$$

mit unveränderten  $g_{\mu\nu}$  erfüllen. Also gibt es nach Satz 1 ein

$$S = I + \varepsilon A_e,$$

so daß in dieser Größenordnung gilt:

$$\alpha'_\mu = S^{-1} \alpha_\mu S,$$

also

$$Y_{\mu e} = -A_e \alpha_\mu + \alpha_\mu A_e^1),$$

folglich:

$$(32a) \quad \alpha_{\mu;e} \equiv \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial X^e} - \Gamma_{\mu e}^\sigma \alpha_\sigma + A_e \alpha_\mu - \alpha_\mu A_e = 0.$$

Mit Benützung von

$$g^{\mu\nu}_{;e} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial X^e} + \Gamma_{\sigma e}^\mu g^{\sigma\nu} + \Gamma_{\sigma e}^\nu g^{\mu\sigma} = 0,$$

folgt man hieraus weiter:

$$(32b) \quad \alpha^\mu_{;e} = g^{\mu\nu} \alpha_{\nu;e} = \frac{\partial \alpha^\mu}{\partial X^e} + \Gamma_{\sigma e}^\mu \alpha^\sigma + A_e \alpha^\mu - \alpha^\mu A_e = 0.$$

Die Gl. (32a) oder (32b) können als Definition von  $\alpha_{\mu;e}$  bzw.  $\alpha^\mu_{;e}$  und von  $A_e$  angesehen werden. Allerdings ist  $A_e$  durch diese Definition nicht eindeutig bestimmt, sondern (nach Satz 2b) bis auf ein Multiplum der Einheitsmatrix als additiven Zusatz. Infolgedessen kann, unbeschadet der Gültigkeit von (32a) und (32b), über das Vektorfeld

$$(33) \quad \text{Spur } A_e = F_e$$

noch beliebig verfügt werden. Um dieses zu normieren, untersuchen wir das Verhalten von  $A_e$  bei  $S$ -Transformationen, bei denen  $S$  noch beliebig von den  $X^\mu$  abhängen kann. Mit

$$\alpha'_\mu = S^{-1} \alpha_\mu S$$

1) Diese Schlußweise findet sich bei E. Schrödinger, Berl. Ber. S. 105, 1932, insbesondere § 2. Unser  $A_e$  entspricht dem Schrödingerschen  $-\Gamma_e$ .

findet man

$$\alpha'_{\mu;e} = S^{-1} \alpha_{\mu;e} S = \frac{\partial \alpha'_{\mu}}{\partial X^e} + \Gamma'_{\mu e} \alpha'_\sigma + A'_e \alpha'_\mu - \alpha'_\mu A'_e = 0$$

[und entsprechendes für (32b)], wenn

$$(34) \quad A'_e = S^{-1} A_e S + S^{-1} \frac{\partial S}{\partial X^e}$$

gesetzt wird. Hierbei ist von

$$-\frac{\partial S^{-1}}{\partial X^e} S = S^{-1} \frac{\partial S}{\partial X^e}$$

Gebrauch gemacht. Die Transformation (34) ist gleichbedeutend damit, daß der Operator

$$(34a) \quad \nabla'_e \equiv \frac{\partial}{\partial X^e} + A_e$$

sich transformiert gemäß

$$(34b) \quad \nabla'_e = S^{-1} \nabla_e S.$$

Weiter folgt für die Transformation von (Spur  $A_e$ ) wegen

$$\text{Det } S \cdot \text{Spur} \left( S^{-1} \frac{\partial S}{\partial X^e} \right) = \frac{\partial}{\partial X^e} \text{Det } S.$$

$$(35) \quad F'_e = F_e + \frac{1}{\text{Det } S} \frac{\partial (\text{Det } S)}{\partial X^e} = F_e + \frac{\partial}{\partial X^e} (\log \text{Det } S).$$

Deshalb scheint es naturgemäß, für  $F'_e$  festzusetzen:

$$(36) \quad F'_{e\sigma} \equiv \frac{\partial F_{e\sigma}}{\partial X^e} - \frac{\partial F_{e\sigma}}{\partial X^\sigma} = 0,$$

oder

$$(36a) \quad F_e = \frac{\partial F}{\partial X^e}$$

bei geeigneter Wahl von  $F$ . Diese Normierung bleibt nämlich nach (35) bei  $S$ -Transformationen invariant, da bei Gültigkeit von (36a) die Transformationsformel (35) einfach die Form annimmt:

$$(35a) \quad F' = F + \log \det S.$$

Die Bedingung (36) ist daher gleichbedeutend mit der Forderung, daß durch eine geeignete  $S$ -Transformation  $F'_e$  zum Verschwinden gebracht werden kann.

Eine andere Möglichkeit wäre, das bei  $S$ -Transformationen invariante  $F'_{e\sigma}$ -Feld proportional zu dem in Teil I, Gl (36) definierten Feld  $X'_{e\sigma}$  zu setzen. Es würde dies mehr analog sein dem von Schrödinger eingeschlagenen Verfahren, der  $F'_e$  proportional zum Viererpotential setzt. Auch bei diesem

Verfahren bliebe es aber vom mathematischen Standpunkt aus willkürlich, das neue  $F_{\rho\sigma}$ -Feld mit dem alten  $X_{\rho\sigma}$ -Feld (bis auf einen numerischen Proportionalitätsfaktor) zu identifizieren. Wir wollen deshalb vorläufig an der Normierungsbedingung (36) festhalten.

Wir können nun die kovarianten Ableitungen der Spinoren  $\Psi$  und  $\Phi$  definieren, wenn wir verlangen, daß für die kovariante Ableitung die Produktregel der gewöhnlichen Differentiation gelten soll und daß für den Skalar

$$a = \Phi \Psi$$

und den Vektor

$$\alpha_\mu = \Phi \alpha_\mu \Psi$$

die gewöhnlichen Regeln

$$a_{;e} = \frac{\partial a}{\partial X^e}$$

und

$$\alpha_{\mu;e} = \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial X^e} - \Gamma_{\mu e}^\sigma \alpha_\sigma$$

gelten sollen. Man findet mittels (32) aus

$$\alpha_{\mu;e} = \Phi_{;e} \alpha_\mu \Psi + \Phi \alpha_{\mu;e} \Psi_{;e}$$

$$(37a) \quad \Phi_{;e} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial X^e} - \Phi A_e,$$

$$(37b) \quad \Psi_{;e} \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial X^e} + A_e \Psi.$$

Bei  $S$ -Transformationen findet man aus (34) leicht

$$\Phi'_{;e} = \Phi_{;e} S, \quad \Psi'_{;e} = S^{-1} \Psi_{;e}.$$

Nun wollen wir die kovariante Ableitung der hermiteschen Matrix  $A$  bestimmen aus der Forderung, daß

$$(\Psi^* A)_{;e} = (\Psi_{;e})^* A + \Psi^* A_{;e},$$

andererseits infolge des Umstandes, daß  $\Psi^* A$  ein  $\Phi$ -Spinor ist, gegeben ist durch

$$(\Psi^* A)_{;e} = \frac{\partial (\Psi^* A)}{\partial X^e} - \Psi^* A A_e.$$

Man findet dann

$$(38) \quad A_{;e} \equiv \frac{\partial A}{\partial X^e} - (A A_e + A_e^\dagger A),$$

wenn  $A_e^\dagger$  die zu  $A_e$  hermitesch konjugierte Matrix ist und wofür bei  $S$ -Transformationen gilt

$$A'_{;e} = S^\dagger A_{;e} S.$$

Wir gewinnen nun eine wichtige Aussage über  $A_{;e}$ , wenn wir beachten, daß gemäß (14) gilt:

$$\alpha_{\mu}^{\dagger} A = \eta A \alpha_{\mu}.$$

Man bestätigt leicht, daß hieraus folgt:

$$\alpha_{\mu}^{\dagger} A_{;e} + (\alpha_{\mu;e})^{\dagger} A = \eta (A_{;e} \alpha_{\mu} + A \alpha_{\mu;e}),$$

wenn für  $\alpha_{\mu;e}$  (32) eingesetzt wird. Wegen  $\alpha_{\mu;e} = \alpha_{\mu;e}^{\dagger} = 0$  folgt weiter:

$$\alpha_{\mu}^{\dagger} A_{;e} = \eta A_{;e} \alpha_{\mu},$$

also

$$A \alpha_{\mu} A^{-1} A_{;e} = A_{;e} \alpha_{\mu}.$$

Nach Satz 2 folgt hieraus

$$(39) \quad A_{;e} = a_e A,$$

wobei der gewöhnliche Zahlvektor  $a_e$  übrigens bei  $S$ -Transformationen invariant ist. Wir können  $a_e$  bestimmen, wenn wir die Spur von  $A^{-1} A_{;e}$  bilden und beachten, daß

$$\text{Spur } A^{-1} \frac{\partial A}{\partial X^e} = \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial X^e},$$

wenn  $a$  die in (15) eingeführte Determinante von  $A$  ist. Es ergibt sich dann gemäß (33) und (38):

$$(40) \quad \frac{\partial \log a}{\partial X^e} - (F_e + F_e^*) = 4a_e$$

(denn die Spur der vierreihigen Einheitsmatrix ist 4). Da die notwendig reelle Determinante  $a$  bei der Definition von  $A$  sonst noch willkürlich geblieben war, können wir diese normierend festsetzen, indem wir, über (39) hinausgehend, fordern:

$$(41) \quad a_e = 0, \text{ also } A_{;e} = 0.$$

Dies ist dann und nur dann möglich, wenn das  $F_{e\sigma}$ -Feld rein imaginär ist, da aus (40) allgemein folgt:

$$(40a) \quad -(F_{e\sigma} + F_{e\sigma}^*) = 4 \left( \frac{\partial a_{\sigma}}{\partial X^e} - \frac{\partial a_e}{\partial X^{\sigma}} \right).$$

Wenn das  $F_{e\sigma}$ -Feld ganz verschwindet, kann gemäß (36a) gesetzt werden:

$$(41a) \quad \log a = F + F^*,$$

um (41b) zu erfüllen. Das Verschwinden der kovarianten Ableitung von  $A$  ist eine Eigenschaft von  $A$ , die dem Verschwinden der kovarianten Ableitung von  $g_{\mu\nu}$  analog ist.

Ganz analog wie bei der Matrix  $A$  kann man mit der durch (14\*) definierten schiefen Matrix  $B$  verfahren, um ihre kovariante Ableitung zu berechnen. Diese ist gegeben durch

$$(38^*) \quad B_{; \mu} = \frac{\partial B}{\partial X^\mu} - (B A_\mu + \bar{A}_\mu B),$$

denn dann ist

$$B_{; \varepsilon} = \bar{S} B_{; \varepsilon} S$$

[vgl. (13\*)] und  $\bar{\Psi} B$  ist auch hinsichtlich seiner kovarianten Ableitung ein  $\Phi$ -Spinor. Analog wie bei  $A$  findet man, daß  $B^{-1} B_{; \varepsilon}$  mit allen  $\alpha_\mu$  kommutiert, also

$$(39^*) \quad B_{; \varepsilon} = b_\varepsilon B,$$

worin  $b_\varepsilon$  ein gegenüber  $S$ -Transformationen invarianter Zahlvektor ist. Durch Bildung der Spur von  $B^{-1} B_{; \varepsilon}$  findet man, wenn  $b$  die in (15\*) eingeführte Determinante von  $B$  ist:

$$(40^*) \quad \frac{\partial \log b}{\partial X^\varepsilon} - 2 F_\varepsilon = 4 b_\varepsilon$$

und hieraus

$$(40a^*) \quad -2 F_{\varepsilon\sigma} = 4 \left( \frac{\partial b_\sigma}{\partial X^\varepsilon} - \frac{\partial b_\varepsilon}{\partial X^\sigma} \right).$$

Wenn also gelten soll:

$$(41^*) \quad b_\varepsilon = 0, \quad B_{; \varepsilon} = 0,$$

muß notwendig

$$F_{\varepsilon\sigma} = 0$$

sein. Man mag dies als Argument für diese früher aufgestellte Forderung betrachten. Es kann dann gesetzt werden:

$$(41a^*) \quad \log b = 2 F.$$

#### § 5. Zusammenhang der projektiven mit den affinen Spinoren. Aufstellung der Wellengleichung

Bevor wir die Wellengleichung aufstellen, müssen wir noch den Zusammenhang herstellen zwischen den zu den fünf homogenen Koordinaten  $X^\mu$  gehörigen projektiven Spinoren  $\Psi$  und den zu den inhomogenen Koordinaten  $x^k$  zugehörigen affinen Spinoren  $\psi$ , sowie zwischen den zugehörigen, ihre Parallelverschiebung bestimmenden Matrizen  $A_\mu$  bzw.  $A_k$ . Definieren wir:

$$(42) \quad \alpha_k = \gamma_{\cdot k}^\mu \alpha_\mu, \quad \alpha_0 = X^\mu \alpha_\mu,$$

so folgt aus (8) und Teil I, Gl. (7), (15), (18):

$$(43a) \quad \frac{1}{2} (\alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i) = g_{ik},$$

$$(43b) \quad \alpha_k \alpha_0 + \alpha_0 \alpha_k = 0,$$

$$(43c) \quad \alpha_0^2 = \varepsilon,$$

und es ist zugleich mit  $A \alpha_\mu$  auch  $A \alpha_k$  und  $A \alpha_0$  hermitesch.

Es gibt nun zugleich mit  $A_\mu$ , welches die Gl. (37a) befriedigt, auch ein Riemannsches  $A_k^R$ , welches die analoge Gleichung

$$(44) \quad \alpha_{k;i} \equiv \frac{\partial \alpha_k}{\partial X^i} - \{^m_{ki}\} \alpha_m + A_i^R \alpha_k - \alpha_k A_i^R = 0$$

erfüllt.

Nun können wir, wie schon oben erwähnt, festsetzen, daß  $S$  stets vom Homogenitätsgrad Null sein soll, damit der Grad von  $\Psi$  sich bei den  $S$ -Transformationen nicht ändert; es wird dann ferner  $\alpha_\mu$  und  $A_\mu^R$  vom Grad  $-1$  sein. Wir müssen dann ferner verlangen, daß in [vgl. (33), (36a)]

$$F_e = \text{Spur } A_e = \frac{\partial F}{\partial X^e}$$

$F$  homogen vom Grad Null ist<sup>1)</sup>, damit  $F$  durch eine  $S$ -Transformation mit homogenem  $S$  nullten Grades zum Verschwinden gebracht werden kann. Dann ist

$$(45) \quad X^e F_e = \text{Spur } X^e A_e = \text{Spur } A_0 = 0.$$

Damit  $\text{Spur } A_k^R$  und  $\text{Spur } A_\mu$  durch dieselbe  $S$ -Transformation simultan zum Verschwinden gebracht werden kann, muß nach (35) gelten:

$$(46) \quad \text{Spur } A_k^R = \gamma^\mu_{\cdot k} \text{Spur } A_\mu.$$

Gemäß (40), (41) kann dann auch  $A$  als vom Grad Null angenommen werden und es ist  $A = A^R$ . Nun können wir:

$$(47) \quad A_\mu - \gamma^\mu_{\cdot k} A_k^R \equiv A_\mu - A_\mu^R = A_\mu$$

berechnen. Denn aus (32a) und (44) folgt mittels Teil I, Gl. (34) unter Benutzung der allgemeinen, durch Teil I, § 7 Gl. (III') charakterisierten  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ :

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} & (A_e \alpha^\mu - \alpha^\mu A_e) - (A_e^R \alpha^k - \alpha^k A_e^R) \gamma^\mu_{\cdot k} \\ & + \varepsilon \left( \frac{\partial \alpha_0}{\partial X^e} - \frac{q}{2} X_e^\nu \alpha^\nu \right) X^\mu \\ & + \varepsilon \alpha_0 \frac{q}{2} X_e^\mu + \varepsilon \frac{p}{2} X_e X_\sigma^\mu \alpha^\sigma = 0. \end{aligned} \right.$$

Durch Multiplikation mit  $\gamma^\mu_{\cdot k}$  folgt hieraus:

$$(48a) \quad A_e \alpha^k - \alpha^k A_e = -\varepsilon \alpha_0 \frac{q}{2} X_e^k - \varepsilon \frac{p}{2} X_e X_i^k \alpha^i.$$

1) Wäre  $F$  der Logarithmus einer homogenen Funktion eines beliebigen Grades, so wäre  $F_e$  immer noch homogen vom Grad  $-1$ .



Wegen  $\Delta = 0$  ist hieraus  $\Delta_e$  eindeutig bestimmt. Man findet mit Rücksicht auf (43) durch eine ähnliche Schlußweise wie bei der Lösung von (21'):

$$(49) \quad \Delta_e = -\varepsilon \frac{q}{4} X_{e l} \alpha_0 \alpha^l - \varepsilon \frac{p}{8} X_e X_{k l} \alpha^{[k l]},$$

wobei

$$\alpha^{[k l]} \equiv \frac{1}{2} (\alpha^k \alpha^l - \alpha^l \alpha^k).$$

Für das Folgende benötigen wir den aus (49) folgenden Ausdruck:

$$(50) \quad \alpha^e \Delta_e = \varepsilon \frac{2q-p}{8} X_{k l} \alpha_0 \alpha^{[k l]}.$$

Durch Multiplikation von (48) mit  $X^\mu$  erhält man andererseits:

$$(48b) \quad \frac{\partial \alpha_0}{\partial X^e} + \Delta_e \alpha_0 - \alpha_0 \Delta_e - \frac{q}{2} X_{e 0} \alpha^e = 0,$$

woraus mittels (49) folgt:

$$(50a) \quad \alpha_{0; k}^R \equiv \frac{\partial \alpha_0}{\partial x^k} + \Delta_k \alpha_0 - \alpha_0 \Delta_k^R = 0.$$

Um ferner den Anschluß an die Diracsche Theorie herstellen zu können, benötigen wir im Falle der speziellen Relativitätstheorie den Zusammenhang der Matrizen  $\alpha_\mu$  mit den fünf hermiteschen Matrizen  $\gamma_\mu$  der Diracschen Theorie, die den Relationen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu \right) &= \delta_{\mu\nu} \\ \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 &= 1 \end{aligned}$$

genügen. Dieser Zusammenhang ist wesentlich verschieden im Fall  $\varepsilon = +1$  und  $\varepsilon = -1$ ).

Im Fall  $\varepsilon = +1$  genügen die  $\alpha_\mu$  wegen

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = +1, \quad g_{44} = -1$$

den Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu &= 0 \text{ für } \mu \neq \nu, \\ (\alpha_1)^2 = (\alpha_2)^2 = (\alpha_3)^2 = (\alpha_0)^2 &= +I, \\ (\alpha_4)^2 &= -I, \end{aligned}$$

1) Dagegen ist das früher eingeführte Vorzeichen  $\eta$  unwesentlich, da bei Vorzeichenumkehr aller  $g_{\mu\nu}$  die Matrizen  $\alpha_\mu$  und  $\Delta$  einfach mit  $i$  multipliziert werden können.

Diesen Gleichungen genügen die Matrizen

$$i\overset{0}{\gamma}_5\overset{0}{\gamma}_1, \quad i\overset{0}{\gamma}_5\overset{0}{\gamma}_2, \quad i\overset{0}{\gamma}_5\overset{0}{\gamma}_3, \quad -i\overset{0}{\gamma}_5, \quad i\overset{0}{\gamma}_5\overset{0}{\gamma}_4$$

und man kann setzen

$$A = -i\overset{0}{\gamma}_5,$$

dann wird

$$[A\overset{0}{\alpha}_k, A\overset{0}{\alpha}_0] = [\overset{0}{\gamma}_1, \overset{0}{\gamma}_2, \overset{0}{\gamma}_3, -I, \overset{0}{\gamma}_4],$$

d. h.

$$s_k = (\psi^* A \overset{0}{\alpha}_k \psi)$$

geht in den Diracschen Stromvektor über. Die angegebene spezielle Lösung von  $A$  und  $\overset{0}{\alpha}_k, \overset{0}{\alpha}_0$  kann dann nämlich immer durch eine geeignete  $S$ -Transformation hergestellt werden.

Anders ist es im Fall  $\varepsilon = -1$ , da dann

$$(\overset{0}{\alpha}_0)^2 = -1,$$

während die übrigen Relationen für die  $\overset{0}{\alpha}$  bestehen bleiben. In diesem Fall ist

$$(\overset{0}{\alpha}_k, \overset{0}{\alpha}_0) = (-i\overset{0}{\gamma}_5\overset{0}{\gamma}_1, -i\overset{0}{\gamma}_5\overset{0}{\gamma}_2, -i\overset{0}{\gamma}_5\overset{0}{\gamma}_3, i\overset{0}{\gamma}_5, -\overset{0}{\gamma}_5\overset{0}{\gamma}_4),$$

$$A = \overset{0}{\gamma}_4$$

eine Lösung für die  $\overset{0}{\alpha}$ , so daß gilt

$$(A\overset{0}{\alpha}_k, A\overset{0}{\alpha}_0)$$

$$= (-i\overset{0}{\gamma}_4\overset{0}{\gamma}_5\overset{0}{\gamma}_1, -i\overset{0}{\gamma}_4\overset{0}{\gamma}_5\overset{0}{\gamma}_2, -i\overset{0}{\gamma}_4\overset{0}{\gamma}_5\overset{0}{\gamma}_3, i\overset{0}{\gamma}_4\overset{0}{\gamma}_5, +\overset{0}{\gamma}_5),$$

dagegen

$$iA\overset{0}{\alpha}_0\overset{0}{\alpha}_k = (\overset{0}{\gamma}_1, \overset{0}{\gamma}_2, \overset{0}{\gamma}_3, -I), \quad iA\overset{0}{\alpha}_0\overset{0}{\alpha}_0 = -i\overset{0}{\gamma}_4.$$

Daher geht in diesem Fall

$$s_k = i\psi^* A \overset{0}{\alpha}_0 \overset{0}{\alpha}_k \psi$$

in den Diracschen Stromausdruck über.

Nach diesen Vorbereitungen können wir daran gehen, die Wellengleichung aufzustellen und zu diskutieren. Diese lautet<sup>1)</sup>

$$(I) \quad \alpha^\mu (\Psi_{;\mu} + k X_\mu \Psi) = 0.$$

1) Das in dieser Gleichung vorkommende, vielleicht etwas unlogisch scheinende Pluszeichen hätte vermieden werden können, wenn man das durch (36) definierte  $F_{\rho\sigma}$ -Feld nicht gleich Null, sondern proportional zu  $X_{\rho\sigma}$  gesetzt hätte. Die im Text gewählte Definition von  $\Psi_{;\mu}$  scheint aber für die Rechnung bequemer.

Für den Homogenitätsgrad  $l$  von  $\Psi$  und den Koeffizient  $k$  werden wir sogleich Realitätsbedingungen aufstellen.

Ausgeschrieben lautet (I)

$$(I) \quad \alpha^\mu \left( \frac{\partial \Psi}{\partial X^\mu} + A_\mu \Psi + k X_\mu \Psi \right) = 0$$

oder

$$(I'') \quad \left\{ \begin{aligned} & \alpha^\mu \left( \frac{\partial \Psi}{\partial X^\mu} + A_\mu^R \Psi + k X_\mu \Psi \right) \\ & + \varepsilon \frac{2q-p}{8} X_{kl} \alpha_0 \alpha^{[kl]} \Psi = 0. \end{aligned} \right.$$

Wir können diese Gleichung noch weiter umformen, wenn wir mit Einführung des vom nullten Grad homogenen Spinors  $\psi$  setzen

$$(51) \quad \Psi = \psi \cdot F^l,$$

worin  $F$  ein reeller Skalar und homogen vom Grad 1 ist.

Aus (I'') folgt dann

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} & \alpha^k \left( \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + A_k^R \psi \right) + k \alpha_0 \psi + l \alpha^\mu \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial X^\mu} \psi \\ & + \varepsilon \frac{2q-p}{8} X_{kl} \alpha_0 \alpha^{[kl]} \psi = 0. \end{aligned} \right.$$

Nun ist

$$(53) \quad \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial X^\mu} = \varepsilon (X_\mu - \gamma_\mu^{\cdot k} f_k)$$

wegen

$$X^\mu \frac{\partial F}{\partial X^\mu} = F;$$

also folgt

$$X_{\mu\nu} = \gamma_\mu^{\cdot k} \gamma_\nu^{\cdot l} \left( \frac{\partial f_l}{\partial x^k} - \frac{\partial f_k}{\partial x^l} \right),$$

also

$$X_{kl} = \frac{\partial f_l}{\partial x^k} - \frac{\partial f_k}{\partial x^l}.$$

Daher ist in (53)  $f_k$  identisch mit dem in Teil I, Gl. (41) definierten Vektor  $f_i$ , der mit den Potentialen  $\Phi_i$  zusammenhängt gemäß Teil I, Gl. (46):

$$(I, 46) \quad f_i = r \frac{\sqrt{\kappa}}{c} \Phi_i.$$

Aus (53) folgt schließlich

$$(I''') \quad \left\{ \begin{aligned} & \alpha^k \left( \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + A_k^R \psi - \varepsilon l f_k \psi \right) + (k + \varepsilon l) \alpha_0 \psi \\ & + \varepsilon \frac{2q-p}{8} X_{kl} \alpha_0 \alpha^{[kl]} \psi = 0. \end{aligned} \right.$$

Die weitere Diskussion wird nun verschieden, je nachdem wir setzen  $\varepsilon = +1$  oder  $\varepsilon = -1$ . Wir interessieren uns hauptsächlich für den Fall  $\varepsilon = +1$ , da  $\varepsilon = +1$  und  $p = q = 1$  auf symmetrische  $I^{\lambda}_{\mu\nu}$  führt. In diesem Fall verlangen wir, daß aus (I) bzw. (I'') folgen soll<sup>1)</sup>

$$(54) \quad \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} (\sqrt{g} \psi^* A \alpha^{\mu} \psi) = 0$$

und

$$(54a) \quad \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} \psi^* A \alpha^k \psi) = 0.$$

Durch Multiplikation von (I'') mit  $\psi^* A$  von links bzw. der konjugierten Gleichung mit  $A^{\dagger} \psi$  von rechts folgt wegen

$$\alpha^{k\dagger} A^{\dagger} = A \alpha^k$$

und (vgl. 38)

$$A_{;k} \equiv \frac{\partial A}{\partial x^k} - (A A_k^R + A_k^R A) = 0,$$

sowie mit Rücksicht auf (44)

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} \psi^* A \alpha^i \psi) - \varepsilon(l + l^*) f_k (\psi^* A \alpha^k \psi) + (k + l + k^* + l^*) (\psi^* A \alpha_0 \psi) = 0.$$

Dabei ist wesentlich benützt, daß

$$(A \alpha_0 \alpha^{[k]})^{\dagger} = -A \alpha_0 \alpha^{[k]},$$

so daß das Zusatzglied fortfällt. Daher gilt (54a), wenn

$$(55) \quad l \text{ imaginär, } k \text{ imaginär.}$$

Wir erhalten bis auf ein später erörtertes Zusatzglied Übereinstimmung mit der Diracschen Gleichung, wenn wir setzen

$$(56) \quad l = + \frac{i e}{\hbar c} \frac{c}{\sqrt{\kappa}} \frac{1}{r}$$

und

$$(57) \quad k = - \frac{i m c}{\hbar} - \frac{i e}{\hbar c} \frac{c}{\sqrt{\kappa}} \frac{1}{r}.$$

Denn (I'') nimmt dann mit  $p = q = 1$  die Form an

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} & \alpha^k \left( \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + A_k^R \psi - \frac{i e}{\hbar c} \Phi_k \psi \right) - i \frac{m c}{\hbar} \alpha_0 \psi \\ & + \frac{r}{8} \frac{\sqrt{\kappa}}{c} F_{kl} \alpha_0 \alpha^{[kl]} \psi = 0. \end{aligned} \right.$$

1) Wir bezeichnen mit  $\bar{g}$  die Determinante der  $g_{ik}$ , mit  $g$  die Determinante der  $g_{\mu\nu}$ .

Man sieht leicht, daß dann auch (54) gültig ist. Als Lagrange-funktion können wir verwenden

$$(59) \quad L_m = \operatorname{Re} 2 \frac{\hbar c}{i} (\psi^* A \alpha^\mu \psi_{;\mu} + k \psi^* A \alpha_0 \psi)$$

oder auch

$$(59a) \quad \left\{ \begin{aligned} L_m &= \operatorname{Re} 2 \frac{\hbar c}{i} \left( \psi^* A \alpha^k \psi_{;k} - \frac{i e}{\hbar c} \psi^* A \alpha^k \psi \Phi_k \right. \\ &\quad \left. - \frac{i m c}{\hbar} \psi^* A \alpha_0 \psi + \frac{r}{8} \frac{\sqrt{x}}{c} F_{ki} \psi^* A \alpha_0 \alpha^{[ki]} \psi \right), \end{aligned} \right.$$

wobei unter  $\operatorname{Re}$  zu verstehen ist, daß der reelle Teil zu nehmen ist.

Die Eichtransformationen

$$\Phi'_k = \Phi_k + \frac{\partial F}{\partial x^k}$$

sind nach (35), (53) mit denjenigen speziellen  $S$ -Transformationen identisch, bei denen

$$\psi' = e^{+\frac{i e}{\hbar c} F} \psi, \quad S = e^{-\frac{i e}{\hbar c} F} \cdot I.$$

Wir besprechen hier nur nebenbei den Fall  $\varepsilon = -1$ . Hier multiplizieren wir die Wellengleichung ( $I'''$ ) zuerst mit  $\alpha_0$  und erhalten

$$\alpha_0 \alpha^k \left( \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + \bar{A}_k \psi + l f_k \right) + (k - l) \psi + \frac{2q - p}{8} X_{ki} \alpha^{[ki]} \psi = 0$$

und verlangen, daß

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} \psi^* A \alpha_0 \alpha^k \psi) = 0$$

folgen soll. Führen wir hierin  $\bar{A} = \sqrt{g} A$  ein, so ist  $\bar{A}$  hermitesch und  $\bar{A} \alpha_0 \alpha^k$  sowie  $\bar{A} \alpha^{[ki]}$  schief-hermitesch. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} \psi^* \bar{A} \alpha_0 \alpha^k \psi) + (l + l^*) f_k (\psi^* \bar{A} \alpha_0 \alpha^k \psi) \\ &+ [(l - l^*) - (k - k^*)] \psi^* \bar{A} \psi + \frac{2q - p}{4} \psi^* \bar{A} \alpha^{[ki]} \psi X_{ki} = 0. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich zunächst, daß das Zusatzglied stört und durch die Annahme

$$(55') \quad 2q = p$$

zum Verschwinden gebracht werden muß. Sodann muß  $l$  wieder rein imaginär sein und muß

$$(56') \quad l = \frac{i e}{\hbar c} \frac{c}{\sqrt{x}} \frac{1}{r}$$

gesetzt werden, weiter ist  $k - l$  reell und  $k$  gleichzusetzen

$$(57') \quad k = \frac{m c}{\hbar} - \frac{i e}{\hbar c} \frac{c}{\sqrt{x}} \frac{1}{r}.$$

Die Lagrangefunktion wird

$$(51') \quad \begin{aligned} L_m &= \operatorname{Re} 2 \frac{\hbar c}{i} (\psi^* i \bar{A} \alpha_0 \alpha^\mu \psi_{;\mu} - k \psi^* i \bar{A} \psi) \\ &= \operatorname{Re} 2 \frac{\hbar c}{i} \left( \psi^* i \bar{A} \alpha_0 \alpha^k \psi_{;k} - \frac{i e}{\hbar c} \psi^* i \bar{A} \alpha_0 \alpha^k \psi \cdot \Phi_k - \frac{i m c}{\hbar} \psi^* \bar{A} \psi \right). \end{aligned}$$

Dieser Fall ist ursprünglich von Schouten und van Dantzig betrachtet worden und es ist bemerkenswert, daß das Zusatzglied hierbei fortfällt. Wir halten diesen Fall jedoch für singular und nicht sehr natürlich.

### § 6. Variationsprinzip und Feldgleichungen

Das Prinzip der Herleitung der Feldgleichungen aus einem Variationsprinzip ist dasselbe wie dasjenige, das im Teil I verwendet wurde. Nur müssen jetzt die Lagrangefunktionen

$$L^{(v)} = P$$

des Vakuums (d. h. der Abwesenheit von Materie) [vgl. Teil I, Gl. (83)] und die Lagrangefunktion

$$L^{(m)}$$

der Materie aneinander gereiht werden. Es ist zu verlangen, daß

$$(60) \quad \delta \int \left( L^{(v)} + \frac{\kappa}{c^4} L^{(m)} \right) \sqrt{g} dX^{(1)} \dots dX^{(5)} = 0,$$

wenn die  $\delta g_{\mu\nu}$  die Nebenbedingung

$$(61) \quad \delta g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = 0$$

erfüllen. Ist allgemein

$$(62) \quad \delta \int L^{(m)} \sqrt{g} dX^{(1)} \dots dX^{(5)} = \int T_{\mu\nu} \sqrt{g} \delta g^{\mu\nu} dX^{(1)} \dots dX^{(5)},$$

wobei  $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$  symmetrisch ist, so werden nach Teil I (79) und (72) die Feldgleichungen

$$(II) \quad K_{\mu\nu} - \bar{K} X_\mu X_\nu = -\frac{\kappa}{c^2} (T_{\mu\nu} - \bar{T} X_\mu X_\nu),$$

worin

$$(63a) \quad \bar{K} = K_{\mu\nu} X^\mu X^\nu, \quad \bar{T} = T_{\mu\nu} X^\mu X^\nu$$

gesetzt ist. Mit

$$(63b) \quad T_{ik} = \gamma^\mu_{;i} \gamma^\nu_{;k} T_{\mu\nu}, \quad T_{i(0)} = \gamma^\mu_{;i} X^\nu T_{\mu\nu}$$

und entsprechendes für  $K_{\mu\nu}$  spalten sich die Gl. (II) in

$$(IIa) \quad K_{ik} = -\frac{\kappa}{c^2} T_{ik},$$

$$(IIb) \quad K_{i(0)} = -\frac{\kappa}{c^2} T_{i(0)}.$$

Analog den Gl. (73) und (76a, b) des Teil I, gelten die Identitäten

$$(64) \quad T_{\mu\nu}{}^{;\nu} \equiv 0,$$

die sich spalten in

$$(64a) \quad T_{i;k}^{\cdot k} - X_{ik} T_{(0)}^{\cdot k} \equiv 0,$$

$$(64b) \quad T_{(0);k}^{\cdot k} \equiv 0.$$

Unter dem Zeichen  $\equiv$  ist hier jedoch zu verstehen, daß die betreffenden Gleichungen dann bestehen, wenn die Wellengleichung (58) als gültig vorausgesetzt wird, nicht aber die Feldgleichungen (II). Denn nur dann verschwinden bei Variation des Koordinatensystems die zusätzlichen, einer infinitesimalen  $S$ -Transformation entsprechenden Variationen der Matrizen  $\alpha^\mu$  und  $A_\mu$ .

Der Projektor  $T_{\mu\nu}$  faßt den Energieimpulstensor  $T_{ik}$  und den Stromvektor

$$(65) \quad v^i = r \frac{\sqrt{\kappa}}{c} T_{(0)}^i$$

einheitlich zusammen. Der Faktor  $r \frac{\sqrt{\kappa}}{c}$  rechtfertigt sich dadurch, daß nach I, Gl. (84c) bzw. (99) gilt

$$K_{(0)}^i = -\frac{1}{r} \frac{\sqrt{\kappa}}{c} F^{ik}_{;k}$$

und die Feldgleichung (IIb) mit Einführung von (65) daher die Form annimmt

$$-\frac{1}{r} \frac{\sqrt{\kappa}}{c} F^{ik}_{;k} = -\frac{\kappa}{c^2} \frac{1}{r} \frac{c}{\sqrt{\kappa}} v^i$$

oder

$$(65a) \quad F^{ik}_{;k} = v^i.$$

Wir wollen im folgenden nur den Fall symmetrischer  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  weiter verfolgen, der  $p = q = 1$ ,  $\varepsilon = +1$  und  $r = \sqrt{2}$  entspricht [vgl. Teil I, Gl. (86)]. Dann hat man nach (59)

$$(59) \quad L^{(m)} = R e 2 \frac{\hbar c}{i} (\Psi^* A \alpha^\mu \Psi_{;\mu} + k \Psi^* A \alpha_0 \Psi).$$

Um die  $T_{\mu\nu}$  nach der Vorschrift (62) bilden zu können, ist es erlaubt, die Wellengleichung

$$\alpha^\mu \Psi_{;\mu} + k \alpha_0 \Psi = 0$$

oder

$$\alpha^k (\psi_{;k} - l f_k) + (k + l) \alpha_0 \psi + \frac{1}{8} X_{kl} \alpha_0 \alpha^{[kl]} \psi = 0$$

vor der Variation als gültig anzunehmen. Da dann eine infinitesimale  $S$ -Transformation der  $\alpha_\mu$  keinen Beitrag zur Variation des Wirkungsintegrals gibt, dürfen für die Varia-



tionen  $\delta \alpha^\mu$  irgendwelche Ausdrücke eingesetzt werden, die den Relationen

$$\frac{1}{2} \delta (\alpha^\mu \alpha^\nu + \alpha^\nu \alpha^\mu) = \delta g^{\mu\nu}$$

genügen. Die einfachste Lösung dieser Gleichung ist

$$(66) \quad \delta \alpha^\mu = \frac{1}{2} \alpha_\nu \delta g^{\mu\nu}$$

die wir im folgenden benützen wollen. Es folgt dann weiter

$$(66a) \quad \delta \alpha_0 = -\frac{1}{4} (\alpha_\nu X_\mu + \alpha_\mu X_\nu) \delta g^{\mu\nu}.$$

Zu einer etwas eingehenderen Rechnung gibt der durch Variation von  $A_\mu$  entstehende Term

$$Re \, 2 \frac{\hbar c}{i} (\Psi^* A \alpha^\mu \delta A_\mu \Psi)$$

der Variation von (59) Anlaß. Der Ausdruck  $\delta A_\mu$  muß nämlich so bestimmt werden, daß die Relationen (32a) oder (32b) nach der Variation bestehen bleiben, wenn (65) für  $\delta \alpha^\mu$  eingesetzt wird. Man erhält sukzessive

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\alpha_\nu \delta g^{\mu\nu})}{\partial X^e} + \Gamma_{\nu e}^\mu \alpha_\sigma \delta g^{\sigma\nu} + 2 \delta \Gamma_{\sigma e}^\mu \alpha^\sigma \\ + (A_e \alpha_\nu - \alpha_\nu A_e) \delta g^{\mu\nu} = -2 (\delta A_e \alpha^\mu - \alpha^\mu \delta A_e) \end{aligned}$$

und unter Benützung von (32a)

$$\begin{aligned} \alpha_\nu \frac{\partial \delta g^{\mu\nu}}{\partial X^e} + \Gamma_{\nu e}^\sigma \alpha_\sigma \delta g^{\mu\nu} + \Gamma_{\nu e}^\mu \alpha_\sigma \delta g^{\sigma\nu} + 2 \alpha^\sigma \delta \Gamma_{\sigma e}^\mu \\ = -2 (\delta A_e \alpha^\mu - \alpha^\mu \delta A_e) \end{aligned}$$

und unter Berücksichtigung von

$$0 = \delta g^{\mu\nu}_{;e} = \frac{\partial \delta g^{\mu\nu}}{\partial X^e} + \delta (\Gamma_{\sigma e}^\mu g^{\sigma\nu} + \Gamma_{\sigma e}^\nu g^{\mu\sigma})$$

endlich

$$\delta A_e \alpha^\mu - \alpha^\mu \delta A_e = \frac{1}{2} (g^{\mu\sigma} \delta \Gamma_{\sigma e}^\nu - g^{\nu\sigma} \delta \Gamma_{\sigma e}^\mu) \alpha_\nu.$$

Man findet hieraus

$$(67) \quad \delta A_e = \frac{1}{8} (g_{\mu\sigma} \delta \Gamma_{\nu e}^\sigma - g_{\nu\sigma} \delta \Gamma_{\mu e}^\sigma) \alpha^{[\mu\nu]}.$$

Hierbei ist [vgl. (33)]

$$\text{Spur } \delta A_e = \delta F_e = 0$$

gesetzt. Man sieht nämlich, daß wegen (36a) und (54), die Variation

$$\delta F_e = \frac{\partial \delta F}{\partial X^e}$$

von  $F_e$  keinen Beitrag zur Variation des Wirkungsintegrals gibt.

Nun berechnen wir

$$Re \frac{1}{i} \Psi^* A \delta A_\mu \Psi = Re \frac{1}{i} \Psi^* A \alpha^\mu \alpha^{[\varepsilon\sigma]} \Psi \cdot \frac{1}{8} (g_{\varepsilon\nu} \delta \Gamma_{\sigma\mu}^\nu - g_{\sigma\nu} \delta \Gamma_{\varepsilon\mu}^\nu).$$

Ist

$$\alpha^{[\mu\varepsilon\sigma]} = \frac{1}{3} (\alpha^\mu \alpha^{[\varepsilon\sigma]} + \alpha^\varepsilon \alpha^{[\sigma\mu]} + \alpha^\sigma \alpha^{[\mu\varepsilon]})$$

die antisymmetrische Linearkombination aus den Produkten von drei Matrizen  $\alpha^\mu$ , so findet man durch eine elementare Umformung unter Benützung von

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\alpha^\mu \alpha^\nu + \alpha^\nu \alpha^\mu),$$

$$(68) \quad \alpha^\mu \alpha^{[\varepsilon\sigma]} = \alpha^{[\mu\varepsilon\sigma]} + (g^{\mu\varepsilon} \alpha^\sigma - g^{\mu\sigma} \alpha^\varepsilon).$$

Bei der Bildung des reellen Teiles verschwinden die von einer Matrix  $\alpha$  herrührenden Beiträge, da  $A \alpha^\varepsilon$  hermitesch,

$$Re \frac{1}{i} \Psi^* A \alpha^\varepsilon \Psi = 0$$

und es bleibt

$$(69) \quad \left\{ \begin{aligned} Re \frac{1}{i} \Psi^* A \delta A_\mu \Psi &= Re \frac{1}{i} \Psi^* A \alpha^{[\mu\varepsilon\sigma]} \Psi \\ &\cdot \frac{1}{8} (g_{\varepsilon\sigma} \delta \Gamma_{\sigma\mu}^\nu - g_{\sigma\nu} \delta \Gamma_{\varepsilon\mu}^\nu). \end{aligned} \right.$$

Wenn nun die  $\Gamma_{\varepsilon\mu}^\nu$  symmetrisch in  $\varepsilon, \mu$  sind ( $p = q = 1$ ) (was bisher noch nicht verwendet wurde) und nur in diesem Falle verschwindet dieser Ausdruck, wie man sieht, da  $\alpha^{[\mu\varepsilon\sigma]}$  in  $\mu$  und  $\sigma$  antisymmetrisch,  $\delta \Gamma_{\sigma\mu}^\nu$  dagegen symmetrisch ist. In diesem Fall gilt also

$$(70) \quad Re \frac{1}{i} \Psi^* A \delta A_\mu \Psi = 0.$$

Nunmehr wird die Berechnung der  $T_{\mu\nu}$  auf Grund von (62) mittels (65) und (66) sehr einfach und man erhält

$$(71) \quad \left\{ \begin{aligned} T_{\mu\nu} &= Re \frac{1}{2} \frac{\hbar c}{i} [\Psi^* A (\alpha_\nu \Psi_{;\mu} + \alpha_\mu \Psi_{;\nu}) \\ &\quad - k \Psi^* A (\alpha_\nu X_\mu + \alpha_\mu X_\nu) \Psi]. \end{aligned} \right.$$

Durch diese Ausdrücke sind der Energieimpulstensor  $T_{ik}$  und der Stromvektor  $T_{i(0)} \equiv v_i$  einheitlich zusammengefaßt.<sup>1)</sup> Um den Projektor  $T_{\mu\nu}$  in  $T_{ik}$  und  $T_{i(0)}$  zu spalten (der Skalar  $\bar{T}$  geht in die physikalischen Aussagen nicht ein), hat man einzusetzen

1) In der früheren Arbeit von W. Pauli u. J. Solomon, a. a. O. war diese Zusammenfassung noch nicht gelungen, da dort nicht homogene Koordinaten verwendet wurden.

$$\psi_{;\mu} = F^l [\gamma_{\mu}^i (\psi_{;i} - l f_i) + l X_{\mu} \psi + A_{\mu} \psi],$$

$$\alpha_{\nu} = \gamma_{\nu}^k \alpha_k + X_{\nu} \alpha_0.$$

$A_{\mu}$  ist durch (47), (49) definiert. Man benötigt die Ausdrücke

$$(72a) \quad Re \frac{1}{i} \psi^* A \alpha_k A_{\mu} \gamma_{\mu}^i \psi = \frac{1}{4} \frac{1}{i} \psi^* A \alpha_{[k\eta]} \alpha_0 \psi X_i^{\cdot l},$$

$$(72b) \quad Re \frac{1}{i} \psi^* A \alpha_i (A_{\nu} X^{\nu}) \psi = -\frac{1}{8} \frac{1}{i} \psi^* A \alpha_{[i k \eta]} \psi X^{k l}$$

und

$$(72c) \quad Re \frac{1}{i} \psi^* A \alpha_0 A_{\mu} \gamma_{\mu}^i \psi = 0.$$

Dabei ist von einer zu (62) analogen Formel für  $\alpha_i \alpha_{[k\eta]}$  Gebrauch gemacht. Durch Einsetzen von

$$X_{ik} = r \frac{\sqrt{\pi}}{c} F_{ik}, \quad r = \sqrt{2},$$

$$(56) \quad l = \frac{i e}{h c} \frac{c}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r},$$

findet man auf diese Weise

$$(73) \quad \left\{ \begin{aligned} T_{ik} &= \frac{1}{2} Re \frac{h c}{i} \psi^* A \left[ \alpha_k \left( \psi_{;i} - \frac{i e}{h c} \Phi_i \psi \right) \right. \\ &\quad \left. + \alpha_i \left( \psi_{;k} - \frac{i e}{h c} \Phi_k \psi \right) \right] \\ &\quad + \frac{\sqrt{2\pi}}{c} \frac{h c}{i} \frac{1}{8} \psi^* A (\alpha_{[k\eta]} \alpha_0 F_i^{\cdot l} + \alpha_{[i\eta]} \alpha_0 F_k^{\cdot l}) \psi, \end{aligned} \right.$$

$$(74) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{c}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} v^i &\equiv T^i_{\cdot(0)} = \frac{1}{2} h c \left\{ (l - k) \frac{1}{i} \psi^* A \alpha^i \psi \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} \frac{1}{i} \psi^* A \alpha^{[i k \eta]} \psi X_{k l} + Re \frac{1}{i} g^{ik} \psi^* A \alpha_0 (\psi_{;k} - l f_k \psi) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Der letzte Ausdruck kann durch eine Umformung wesentlich vereinfacht werden. Multipliziert man nämlich die Wellengleichung (58) von links mit  $\frac{1}{i} \psi^* A \alpha_0 \alpha^i$  und bildet den reellen Teil, so ergibt sich

$$(75) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{1}{i} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \sqrt{g} (\psi^* A \alpha_0 \alpha^{[ik]} \psi) \\ &\quad + Re \frac{1}{i} \psi^* A \alpha_0 (\psi_{;k} - l f_k \psi) g^{ik} \\ &\quad - \frac{1}{i} (l + k) \psi^* A \alpha^i \psi - \frac{1}{i} \frac{1}{8} \psi^* A \alpha^{[i k \eta]} \psi X_{k l} = 0, \end{aligned} \right.$$

also wird

$$\frac{c}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} v^i = \frac{h c}{i} l \psi^* A \alpha^i \psi - \frac{1}{4} \frac{h c}{i} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \sqrt{g} (\psi^* A \alpha_0 \alpha^{[ik]} \psi)$$

oder

$$(76) \quad v^i = e \psi^* A \alpha^i \psi - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2\pi}}{c} \frac{\hbar c}{i} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \sqrt{g} (\psi^* A \alpha_0 \alpha^{(ik)} \psi).$$

Da der Zusatzterm eine identisch verschwindende Divergenz besitzt, folgt aus (54a) die durch (64b) geforderte Beziehung

$$(64b) \quad v^k_{;k} \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} v^k}{\partial x^k} = 0.$$

Die Feldgleichung (IIb') nimmt nun die Form an

$$(77) \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} F^{ik}}{\partial x^k} = v^i = e \psi^* A \alpha^i \psi \\ - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2\pi}}{c} \frac{\hbar c}{i} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \sqrt{g} (\psi^* A \alpha_0 \alpha^{(ik)} \psi). \end{cases}$$

Die Zusatzterme in (73) bzw. (77) stellen eine Abweichung der vorliegenden Theorie von der Diracschen Theorie dar. Da diese Terme aber proportional zu  $\sqrt{2\pi}$  sind, dürften sie kaum der physikalischen Erfahrung widersprechen bzw. empirisch nachweisbar sein. Aus dem Zusatzglied in (77) kann gefolgert werden, daß elektrisch neutrale Massen mit einem resultierenden Spinnmoment (ein resultierendes Bahnimpulsmoment genügt jedoch nicht) ein kleines magnetisches Moment besitzen müssen (was vielleicht im Hinblick auf das Problem des Erdmagnetismus nicht ganz ohne Interesse ist).

Wie in der Einleitung betont, müßten die in diesem Paragraphen aufgestellten Feldgleichungen einer nochmaligen Quantisierung unterworfen werden, die den Übergang zum Konfigurationsraum mit sich bringt, um die Wechselwirkung der geladenen Teilchen zu beschreiben. Bekanntlich bleibt dabei aber die Schwierigkeit der unendlichen Selbstenergie der Teilchen bestehen.

Der gegenüber dem Inhalt des sich auf die rein klassische Theorie beziehenden ersten Teiles mehr provisorische Charakter der hier entwickelten fünfdimensional-projektiven Form der Diracschen Theorie kommt auch darin zum Ausdruck, daß die Lagrangefunktion der Materie zu der des Vakuums einfach hinzuaddiert wird ohne mit ihr logisch verknüpft zu sein. Im Gegensatz zur Verknüpfung des elektromagnetischen und des Gravitationsfeldes miteinander ist eine direkte logische Verknüpfung des Materiewellenfeldes mit den genannten Feldern durch die entwickelte Formulierung der Theorie nicht erreicht.

Zürich, Physikalisches Institut der ETH.

(Eingegangen 15. Juli 1933)

## Über die Ladungsempfindlichkeit des Comptonelektrometers

Von Franz Wolf

(Mit 8 Figuren)

Inhalt: I. Grundlagen. — II. Wahl günstiger Bedingungen: 1. Kapazität; 2. Nadelgröße; 3. Quadrantendose. — III. Praktische Ausführung: 1. Abmessungen, Bau des Systems; 2. Schaltung; 3. Zur Justierung. — IV. Leistungsfähigkeit des Elektrometers: 1. Skalenhomogenität; 2. Empfindlichkeitskurven, Konstantenbestimmung; 3. Grenze der Stabilität, Wahl günstiger Arbeitsbedingungen; 4. Vergleich mit der Leistungsfähigkeit anderer Instrumente. — Zusammenfassung.

Das Elektrometer von A. H. Compton und K. T. Compton<sup>1)</sup>, das umseitig näher beschrieben wird, ist bekannt durch die mit ihm erreichbare außerordentlich große Spannungsempfindlichkeit. Man verwendet es auch gerne als Ladungsmesser zum Vergleich kleiner Elektrizitätsmengen, ohne sich jedoch über seine absolute Leistungsfähigkeit in dieser Richtung Rechenschaft zu geben. Es genügt bekanntlich nicht, neben der Spannungsempfindlichkeit die „Kapazität“ des aufzuladenden Systems aus Elektrometer und Apparat anzu- geben, um die Ladungsempfindlichkeit zu kennen. Denn diese Kapazität ist bei jedem empfindlichen Instrument in dem vom Elektrometer herrührenden Anteil wesentlich mit der Hilfs- spannung veränderlich.<sup>2)</sup> Man muß unbedingt die Ladungs- empfindlichkeit gesondert neben der Spannungsempfindlichkeit messen und kann dann erst im Bedarfsfall umgekehrt aus diesen beiden Größen auf die Kapazität schließen.

Um einen Anhalt über die absolute Leistungsfähigkeit des Comptonelektrometers als Mengenmeßinstrument zu bieten, seien im folgenden einige Gesichtspunkte zur geeigneten Kon- struktion und Handhabung angegeben und die damit erreichten praktischen Ergebnisse mitgeteilt.

1) Phys. Rev. **13**. S. 288. 1919; **14**. S. 85. 1919.

2) F. Harms, Ann. d. Phys. **10**. S. 816. 1903; vgl. auch z. B. G. Hoffmann, Ann. d. Phys. **52**. S. 665. 1917.

## I. Grundlagen

Nach der allgemeinen Theorie der Elektrometer mit elektrostatisch modifizierter Richtkraft<sup>1)</sup> sei der Zusammenhang der Gesamtkapazität  $C$  der aufzuladenden Leiter mit der Positionskoordinate  $\varphi$  des beweglichen Elektrometersystems gegeben durch die abgebrochene Reihenentwicklung:

$$C = C_0 + a\varphi + \frac{b}{2}\varphi^2,$$

wobei  $C_0$  die Kapazität der aufzuladenden Leiter beim Ausschlag  $\varphi = 0$  des Elektrometers,  $a(>0)$  den ersten,  $b$  den zweiten Differentialquotienten der Kapazität nach  $\varphi$  bedeutet. Wir messen die Kapazitäten in Zentimeter,  $a$  in cm/Skt.,  $b$  in cm/(Skt.)<sup>2</sup>. Ferner soll die Ladung in dem praktisch bequemen Maß Voltzentimeter (Vcm) oder Millivoltzentimeter (mVcm) gemessen werden, wobei

$$1 \text{ Vcm} = 1000 \text{ mVcm} = 1,11 \cdot 10^{-12} \text{ Coulomb},$$

$$1 \text{ mVcm} = 6983 \text{ Elementarquanten}.$$

Statt mit der Spannungsempfindlichkeit (SE.) in Skt./V und der Ladungsempfindlichkeit (LE.) in Skt./Vcm arbeitet man vorteilhaft auch mit ihren reziproken Werten, dem

„Spannungswert“  $S$  in V/Skt. und

„Ladungswert“  $L$  in Vcm/Skt.

In der Umgebung der Ruhelage des Elektrometersystems ergibt sich ihre Abhängigkeit von der angelegten Hilfsspannung  $V$  nach der Theorie durch die Gleichungen:

$$(1) \quad S = \frac{R}{aV} - \frac{bV}{2a},$$

$$(2) \quad L = \frac{C_0 R}{aV} - \frac{C_0 b V}{2a} + aV,$$

$$(2a) \quad = C_0 S + aV.$$

Hierin bedeutet noch  $R$  den Differentialquotienten der mechanischen Richtkraft des Elektrometersystems nach seiner Positionskoordinate  $\varphi$ , gemessen in (Volt)<sup>2</sup> cm/(Skt.)<sup>2</sup>. Aus den Gl. (1), (2) läßt sich die eingangs erwähnte Abhängigkeit der Kapazität von  $V$  als Proportionalitätsfaktor zwischen  $L$  und  $S$  sofort hinschreiben.<sup>2)</sup>

Das Comptonelektrometer ist ein Quadrantelektrometer, das die elektrostatische Astasierung zur Erhöhung der

1) Wien-Harms, Hdbch. d. Eyperimentalphys. X. S. 44 u. f.

2) Man findet, daß  $C$  mit abnehmendem  $S$  wächst und für  $S = 0$ , d. h. für unendliche Spannungsempfindlichkeit, selbst unendlich wird.

Empfindlichkeit systematisch benutzt. Die Theorie des Elektrometers zeigt<sup>1)</sup>, daß für die obige Größe  $a$  in Annäherung gilt:

$$(3) \quad a = \text{const} \cdot \frac{r^3}{h},$$

wo  $r$  den Nadelradius und  $h$  die lichte Höhe der Quadrantendose bedeutet. Zur Astasierung erhält die Elektrometernadel gegen die Horizontalebene eine kleine Kippung um ihre Längsachse. Der Tangens des Kippwinkels gegen die Horizontale sei  $s$ . Gleichzeitig läßt sich ein Quadrant gegenüber den drei andern um meßbare Beträge  $\delta$  vertikal heben und senken. Nach der Theorie wird die obige Größe  $b$  dieser Vertikalverschiebung  $\delta$  des Quadranten proportional<sup>2)</sup>, und zwar ergibt sich:

$$(4) \quad b = \text{const} \cdot \frac{r^3 s \delta}{h^3}.$$

Man hat hier also den Vorteil vor andern Instrumenten, noch in betriebsfertigem Zustand die elektrostatische Astasierung  $b$  in weiten Grenzen willkürlich wählen zu können. Es gilt, die Auswirkung dieser freien Wählbarkeit von  $b$  auf Ladungsmessungen zu untersuchen.

Die Abhängigkeit der Größen  $S$  und  $L$  von  $b$  wird klar, wenn man beachtet, daß in den obigen Gl. (1), (2) das erste Glied jeweils eine Hyperbel mit den Koordinatenachsen als Asymptoten darstellt, während die folgenden Glieder Geraden durch den Nullpunkt bedeuten.  $S$  selbst wird demnach zur gleichseitigen Hyperbel (Fig. 1, Typ II) wenn  $b = 0$  ist. Außerhalb dieses Spezialfalles wird für  $b < 0$  die  $S$ -Kurve zu einer Hyperbel vom Typ I mit Minimum, für  $b > 0$  entsteht der Typ III,  $S$  wird bei endlichem  $V$  zu Null, (die SE. steigt ins Unendliche).

Soll andererseits  $L$  eine Kurve vom Typ II sein, so muß nach Gl. (2)  $b = \frac{2a^3}{C_0}$  sein. Außerhalb dieses Spezialfalles entsteht für  $L$  eine Kurve vom Typ I, wenn  $b < \frac{2a^3}{C_0}$ , dagegen eine solche vom Typ III, wenn  $b > \frac{2a^3}{C_0}$ .  $L$  wird hier bei endlichem  $V$  zu Null, (die LE. steigt ins Unendliche).

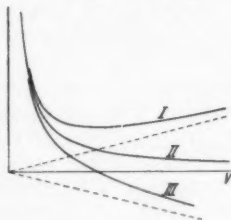


Fig. 1

1) Vgl. die Größe  $k_1$  bei Compton, Phys. Rev. 14. S. 89. 1919.

2) Vgl. die Größe  $k_2$  a. a. O.



Im vorliegenden Fall interessiert nur das Gebiet, wo die LE. groß, also  $L$  möglichst klein gemacht werden kann. Hierfür ist

$$b \cong \frac{2a^2}{C_0}$$

zu wählen. Bei Ausschluß des Gleichheitszeichens schneidet sowohl die  $S$ - als auch die  $L$ -Kurve die  $V$ -Achse im Endlichen,  $S$  bei dem Wert  $V = P = \sqrt{\frac{2R}{b}}$ ,  $P$  „quantimetrischer Punkt“,  $L$  bei einem ebenfalls leicht berechenbaren Wert  $V > P$ . Mit wachsendem  $b$  rücken die beiden Schnittpunkte zu immer kleineren Werten  $V$ . Wie weit man mit einem Instrument wirklich zu kleinsten  $S$ - bzw.  $L$ -Werten vordringen kann, ohne daß es labil und damit zu quantitativen Messungen unbrauchbar wird, läßt sich nur praktisch entscheiden.

## II. Wahl günstiger Bedingungen

### 1. Kapazität

Aus Gl. (2a) entnimmt man, daß für jedes Elektrometer bei gleichem Spannungswert  $S$  der Ladungswert  $L$  um so kleiner, also günstiger ausfällt, je kleiner die aufzuladende Kapazität  $C_0$  ist. Man hat demnach einerseits für kleine Kapazität der ans Elektrometer angeschlossenen Apparaturteile zu sorgen. Andererseits muß der Beitrag des Elektrometers selbst zu  $C_0$  klein gehalten werden. Hierzu verwendet man — entgegen dem sonstigen Gebrauch — das Comptonelektrometer zweckmäßig in Nadelschaltung, wobei der die Nadel tragende Kopf möglichst kapazitätsarm ausgebildet wird, etwa in der Art wie bei den Hoffmannschen Duantenelektrometern.<sup>1)</sup>

### 2. Nadelgröße

Liegt  $C_0$  fest, so ergibt Gl. (2a) weiter, daß bei bestimmtem  $S$  zur Erreichung eines kleinen  $L$ -Wertes die Konstante  $a$  möglichst klein zu halten ist.  $a$  ist — als Veränderung der Kapazität zwischen einem Quadrantenpaar und der Nadel bei Drehung um 1 Skt. — mit der Nadelgröße verknüpft. Setzt man eine sektorenförmige Nadel (Fig. 2) voraus, so wächst  $a$  proportional dem Quadrat des Nadelradius  $r$  [Gl. (3)]. Daraus ergibt sich die Forderung,  $r$  so klein als irgend möglich zu machen.

1) z. B. G. Hoffmann, *Ann. d. Phys.* **52**. S. 665. 1917; K. Engel u. W. S. Pforte, *Phys. Ztschr.* **32**. S. 81. 1931.



## 3. Quadrantendose

$a$  wird weiter verkleinert, je größer man die lichte Höhe  $h$  der Dose einrichtet. Großes  $h$  ist aber auch deswegen wichtig, weil in den Comptonschen Entwicklungen ein Glied<sup>1)</sup> auftritt, das mit abnehmendem  $h$  Labilität der Skalennullage hervorruft durch steigende Empfindlichkeit bei wachsenden Ausschlägen. Doch darf man mit der Vergrößerung von  $h$  andererseits nicht zu weit gehen, da hiermit gleichzeitig — entgegen dem Zweck des Elektrometers — wegen Gl. (4)  $b$  verkleinert wird. Da auch der Nadelradius  $r$  nach oben klein gehalten werden muß, so bleibt zur wirksamen Vergrößerung von  $b$  schließlich nur noch die Quadrantenhebung um entsprechend größere Beträge  $\delta$  bzw. größere Kippung  $s$  der Nadel übrig. Auch hiermit ist nicht zu weit zu gehen, da sonst ebenfalls die Stabilität gefährdet wird.<sup>1)</sup>

Praktisch wird die Abhängigkeit des  $b$  von  $\delta$  noch herabgesetzt durch die in der Theorie nicht enthaltene Notwendigkeit, für die Aufhängung der Nadel im Deckel der Quadrantendose ein Loch zu lassen, das im Innern die Feldverhältnisse stört. Wenn der Lochradius vergleichbar wird mit dem Nadelradius, bewirkt Veränderung von  $\delta$  überhaupt kaum noch eine Änderung von  $b$ . Allerdings läßt sich hierin wieder eine Besserung erzielen, wenn man, wie Versuche zeigten, den Öffnungswinkel der Nadelsektoren möglichst groß macht. Glücklicherweise wird praktisch, wenn der hebbare Quadrant mit den übrigen Quadranten in gleicher Höhe steht, also  $\delta = 0$  ist, bei diesen unsymmetrischen Feldverhältnissen  $b$  nicht Null, sondern schon hinreichend positiv. Veränderung von  $\delta$  durch Heben und Senken ergibt dann ein Schwanken von  $b$  um diesen positiven Wert.

## III. Praktische Ausführung

## 1. Abmessungen, Bau des Systems

In dem praktisch ausprobierten Fall beträgt der innere Dosendurchmesser 19 mm, die lichte Dosenhöhe  $h$  7 mm. Das Loch im Dosendeckel war zuerst 4, bei den endgültigen Versuchen 2 mm weit, was die Beeinflussbarkeit von  $b$  durch  $\delta$  wesentlich verbesserte; doch wäre eine kleinere Öffnung, etwa 1 mm, noch zweckmäßiger. Versuche mit verschiedenen Nadeln bestätigten die Überlegungen von II: Abnehmender Nadelradius  $r$  vergrößert die Mengenempfindlichkeit erheblich, setzt aber die Veränderlichkeit von  $b$  mit  $\delta$  herab. Verbessert wird sie durch

1) Mit  $k_s$  a. a. O.

Verwendung großer Sektorwinkel. Der Verkleinerung von  $r$  steht außerdem eine wachsende Labilität des Systems im Wege. Folgende Maße haben sich noch als gut brauchbar erwiesen: Die Nadel wurde von der Form der Fig. 2 ausgebildet mit einem Radius  $r = 4,0$  mm und einem Sektorwinkel von etwa  $65^\circ$ . Ein noch etwas größerer Winkel würde für die Veränderlichkeit von  $b$  nur günstig sein.



Fig. 2

In Nadelanschaltung genügen für das System nicht dieselben mangelhaften Kontakte, wie sie für Quadrantenschaltung üblich sind, wo die Nadel stets dieselbe Spannung behält; vielmehr muß für allerbeste Verbindungen in der Nadelzuleitung gesorgt werden. Aus diesem Grunde wird das ganze System ähnlich wie beim Hoffmann-Elektrometer aus seinen verschiedenen Teilen zu einem zusammenhängenden Stück verlötet, am bequemsten durch Schnellot. Die Nadel selbst besteht hierzu aus Pt-Ir-Blech von 0,01 mm Stärke, das bei den kleinen Abmessungen noch genügende Starrheit besitzt. Als Stiel verwendet man zweckmäßig zur Vermeidung überflüssiger Lötstellen gleich den teilweise abzuätzenden Wollastondraht, der mit dem Silber etwa 0,2 mm dick ist. Er wird mit dem oberen Ende in einen 1 mm dicken, 15 mm langen, angebohrten Messingstift eingelötet, der mittels Klemmschraube unter gutem Kontakt in den Elektrometerkopf eingesetzt werden kann. Die endgültig verwandte Dicke der Wollastonseele beträgt 0,0045 mm, die Länge des abgeätzten Teils 35 mm, die Länge des unabgeätzten Nadelstiels 18 mm, der Kippwinkel der Nadel etwa  $7,5^\circ$ . Dieser mußte nach II, 3. größer als bei Compton selbst gewählt werden, war jedoch noch klein genug, um die Stabilität des Systems zu erhalten. Der Spiegel von 2,5 mm Durchmesser und 0,2 mm Dicke reicht längst aus, um einen Spalt auf transparenter Skala noch objektiv abzubilden.

Die Maße sind insofern nicht willkürlich, als sie die Schwingungsdauer des Systems bestimmen. Versuche zeigten, daß große Schwingungsdauer die Sicherheit der Ausschläge und des Nullpunktes heruntersetzen. Kleinere dagegen machen zu große Hilfsspannungen erforderlich, so daß auch hierdurch Unsicherheiten und Unbequemlichkeiten entstehen. Wirklich geeignet sind nur Schwingungsdauern (für die halbe Periode) in engem Bereich um 4,5 Sek. Das benutzte System zeigte 4,6 Sek. Diese rein mechanische Schwingungsdauer wird sofort vergrößert, wenn man die Richtkraft durch Anlegen von Hilfsspannung elektrisch vermindert.

## 2. Schaltung

Das gesamte Schaltschema, wie es sich als brauchbar erwies, gibt — vielfach in Anlehnung an Hoffmanns Erfahrungen — Fig. 3 wieder. Natürlich muß peinlich auf gute Kontakte geachtet werden. Am besten benutzt man an den zu variierenden Stellen Kurbelwiderstände. Zur Vermeidung von Nullpunktwanderungen müssen die Batterien temperaturkonstant aufgestellt sein. Ebenso ist das Elektrometer selbst — am besten durch dicken Wassermantel — gegen Temperaturschwankungen zu schützen. Vorteilhaft ist die Wippe *W*, die das Elektrometer an- und abzuschalten gestattet, ohne daß die Belastung der Hilfsspannungsquellen geändert zu werden braucht. Mittels der Verzweigungsschaltung *N* läßt sich der Nullpunkt auf jede beliebige Stelle der Skala bringen.

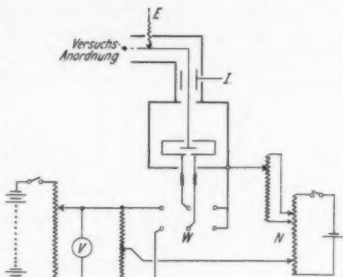


Fig. 3

Die Messung der *Spannungsempfindlichkeit* geschieht durch Anlegen eines bekannten kleinen Potentials an den Kontakt *E*, der sonst als Erdschlüssel dient. Für die Ermittlung der *Ladungsempfindlichkeit* wird die bekannte Influenzierungsmethode<sup>1)</sup> angewandt, indem man durch Anlegen eines bestimmten Potentials bei *I* auf dem Elektrometersystem eine errechenbare Influenzladung erzeugt.

## 3. Zur Justierung

Nachdem das Instrument geometrisch einwandfrei aufgestellt wurde, ist noch die Höhenlage der Nadel in der Quadrantendose richtig zu treffen. Dies geschieht am sichersten durch elektrische Probe:

Die Comptonsche Theorie verlangt, daß die Nadel genau in der Mitte zwischen Boden und Deckel der Quadrantendose schweben soll<sup>2)</sup>, um Abweichungen der Nullage des Systems unter Spannung von der rein mechanischen Ruhelage zu vermeiden. Diese Vorschrift ist einerseits bei der benutzten

1) Wien-Harms, Hdbch d. Experimentalphys. X. S. 130 u. f.

2) Vgl. a. a. O. die Betrachtungen über das Glied mit *K*.

Schaltung belanglos, da die Nullage mittels  $N$  (Fig. 3) ohnehin willkürlich wählbar ist. Andererseits wird ja praktisch durch die Öffnung im Dosendeckel das Feld verzerrt. Prüft man empirisch die Spannungsempfindlichkeit unter sonst konstanten Bedingungen in Abhängigkeit von der Nadelhöhe  $H$  über dem Boden der Dose, so wird nahe der Dosenmitte ein Extremwert durchlaufen, wofür Fig. 4 ein Beispiel gibt. Man ist am sichersten gegen Störungen, wenn man die Nadelhöhe auf dieses Extremum einstellt. — So wurde in allen Fällen verfahren.

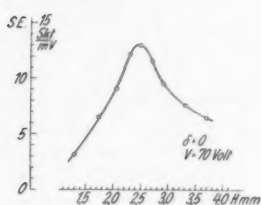


Fig. 4

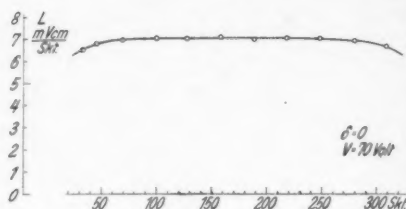


Fig. 5

#### IV. Leistungsfähigkeit des Elektrometers

##### 1. Skalenhomogenität

Die schon unter II. 3. erwähnte steigende Empfindlichkeit mit wachsendem Ausschlag bewirkt eine Skaleninhomogenität. Doch wird diese infolge der dort angedeuteten geeigneten Wahl der Bedingungen nur bei starker Beanspruchung des Instruments merklich und bleibt auch dann noch in mäßigen Grenzen. Eine Probe gibt Fig. 5. Über der gesamten Skala als Abszisse sind die zu einzelnen Skalenteilen gehörenden Ladungswerte  $L$  in  $\text{mVcm/Skt.}$  aufgetragen. In dieser Darstellung fällt mit der mechanischen Ruhelage ein Maximum von  $L$  zusammen. Zu beiden Seiten senkt sich  $L$  nur in äußersten Bezirken der Skala merklich. Im mittleren Teil darf sie noch als hinreichend homogen betrachtet werden.

##### 2. Empfindlichkeitskurven, Konstantenbestimmung

Zur Prüfung der Leistungsfähigkeit des Elektrometers wurden Empfindlichkeitskurven für Ladung aufgenommen bei verschiedenen Einstellungen der Quadrantenhöhe  $\delta$ . Das Instrument war dabei mit einer größeren Apparatur verbunden.  $\delta$  durchlief Werte von  $-2,00$  mm (unter Normalstellung) bis  $+1,90$  mm (über Normalstellung). Fig. 6 enthält die hierbei

gewonnenen Kurven, also LE. in Skt./Vcm über der Hilfsspannung  $V$ . Man findet ein ähnliches Bild wie für die Spannungsempfindlichkeit, LE. wächst bei gleichem  $V$  erheblich, wenn  $\delta$  von  $-2,0$  bis  $+1,9$  läuft.

Zur Ermittlung der Konstanten  $a$  und  $C_0$  sowie des mit  $\delta$  variablen  $b$  hat man sich des unter I angegebenen Gleichungssystems zu bedienen, wie dies von Hoffmann durchgeführt wurde.<sup>1)</sup> Man braucht bei jedem  $\delta$  außer der Kurve der Ladungswerte  $L$  auch diejenige der Spannungswerte  $S$  und

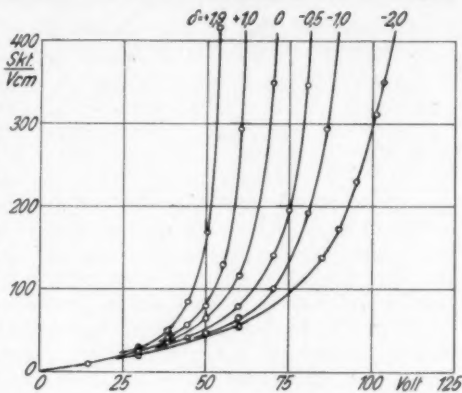


Fig. 6

schließt von den Verhältnissen in der Gegend des quantimetrischen Punktes  $V=P$ , wo  $S$  verschwindet, auf die gesuchten Konstanten. Da das Comptonelektrometer nicht wie das Hoffmannelktrometer Ladungsmessungen bei  $V \geq P$  gestattet, die Unterlagen zur

Konstantenberechnung also nur extrapolatorisch zu gewinnen sind, wurden jedesmal  $L$ -Kurven bei zwei verschiedenen Apparaturkapazitäten aufgenommen, die sich nach der Theorie über  $V=P$  schneiden müssen und dadurch die Extrapolation wesentlich sicherer machen. In Fig. 7 sind die für das Verfahren wesentlichen Kurventeile für den Fall  $\delta = -1,00$  eingetragen.<sup>2)</sup>  $L_1$  bezieht sich auf die bei Fig. 6 benutzte,  $L_2$  auf eine größere Apparaturkapazität.

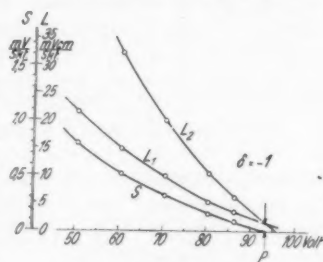


Fig. 7

1) Ann. d. Phys. 52. S. 674. 1917.

2) Willkürlich herausgegriffen; in anderen Fällen wurden noch näher bei  $P$  liegende Punkte gewonnen.

Die Auswertung solcher Kurven für die untersuchten Einstellungen  $\delta$  führte zu den Werten der folgenden Tabelle für  $a$  und  $b$ :

$\delta$ mm	$a$ cm/Skt.	$b$ cm/Skt. <sup>2</sup>	$A$ cm	$B$ cm
-2,00	$1,84 \cdot 10^{-5}$	$1,37 \cdot 10^{-10}$	0,0579	0,00135
-1,00	1,79	2,01	0,0563	0,00198
0,00	1,75	3,50	0,0551	0,00346
+1,00	1,59	4,63	0,0500	0,00457
+1,90	1,44	5,34	0,0453	0,00527

Da  $a$  und  $b$  noch von der zufälligen Skalenentfernung  $D$  abhängig sind, geben die dahintergesetzten Größen  $A$  und  $B$  die entsprechenden Werte, bezogen auf die Systemverdrehung um den Einheitswinkel. Es ist  $A = 2Da$  und  $B = (2D)^2b$  mit dem verhältnismäßig kleinen Skalenabstand von  $D = 1571$  Skt. — Für die beiden benutzten Kapazitäten ergeben sich bei Systemruhelage die mittleren Werte  $C_{01} = 24$  cm und  $C_{02} = 56$  cm. Auf das Elektrometer selbst entfallen hiervon etwa 4 cm.

Es ist nicht verwunderlich, daß auch  $a$  etwas von  $\delta$  abhängt, da ja durch Verschrauben des einen Quadranten und Neujustierung der Nadel die Kapazität zwischen Nadel und Dose jeweils geändert wird. Für  $b$  ergibt sich dagegen starke Abhängigkeit von  $\delta$ , es ist durchweg  $> \frac{2a^2}{C_0}$ , und jetzt bestätigt sich die unter I gemachte Feststellung, daß der Zustand  $LE. \rightarrow \infty$  (d. h.  $L \rightarrow 0$ ) bei um so kleinerem  $V$  eintritt, je größer  $b$  ist.

### 3. Grenze der Stabilität, Wahl günstiger Arbeitsbedingungen

Sorgt man für gute Konstanz aller sonstigen Bedingungen, so behält das Instrument beim Arbeiten mit der größeren Apparaturkapazität genügende Stabilität des Nullpunktes und Reproduzierbarkeit der Ausschläge bis zu dem Ladungswert von rund 5 mVcm/Skt. = 34900 Elementarquanten pro Skalenteil (d. h.  $LE. = 200$  Skt/Vcm), ohne daß wesentliche Unterschiede für verschiedene  $b$  festzustellen sind. Mit der kleineren Apparaturkapazität entsprechend den Kurven von Fig. 6 kommt man noch etwas weiter. Es ist auf jeden Fall vorteilhaft,  $C_0$  möglichst klein zu gestalten. Die Einstellungsdauer beträgt bei diesen großen Empfindlichkeiten  $\frac{1}{2}$ — $\frac{3}{4}$  Min.

Die geeignete Wahl von  $b$ , um am bequemsten zu kleinen Ladungswerten vorzudringen, würde durch Beantwortung der präziseren Frage gelöst, welches  $b$  bei gleichem Spannungs-

wert  $S$  zu möglichst kleinem Ladungswert  $L$  führt. In Fig. 8 sind für drei gemessene Fälle mit verschiedenem  $b$  (bzw.  $\delta$ ) die Ladungswerte  $L$  markiert, die jeweils dem praktisch noch erreichbaren Spannungswert  $S = 0,2 \text{ mV/Skt.}$  entsprechen. Beim Übergang von  $\delta = -2,0$  auf  $\delta = +1,9$ , also von kleinem zu großem  $b$ , nimmt hierbei  $L$  um  $17\%$  ab. Demnach ist großes  $b$  für die rasche Erreichung kleiner Ladungswerte günstig. Dieser Zusammenhang ist auch sofort aus Gl. (2a) zu sehen.  $L$ -Werte, die zu gleichem  $S$  gehören, unterscheiden sich nur durch ihren zweiten Summanden  $aV$ . Dieser wächst mit abnehmendem  $b$ , da dann das betrachtete  $L$  über größerem  $V$  liegt. Die festgestellte schwache Veränderlichkeit von  $a$  selbst wirkt im gleichen Sinn.

Dieser Vorteil der Verwendung großer  $b$  wird aber dadurch beeinträchtigt, daß bei großem  $b$  die  $S$ - und  $L$ -Kurven mit geringer Vergrößerung von  $V$  außerordentlich steil abfallen, so daß eine Einstellung auf bestimmte Empfindlichkeit schwierig und durch kleinste Schwankungen von  $V$  stark gefährdet ist. Daher ist als letztes Ergebnis dieser Untersuchungen doch zu empfehlen, beim Arbeiten mit großer Mengenempfindlichkeit sich möglichst auf kleinere Werte  $b$  zu beschränken und dafür größere Hilfsspannungen  $V$  anzuwenden.

#### 4. Vergleich mit der Leistungsfähigkeit anderer Instrumente

Das Binantenelektrometer von Dolezalek gestattet eine Empfindlichkeit, die dem Ladungswert  $L = 150 \text{ mVcm/Skt.}$  entspricht.<sup>1)</sup> Mit dem gewöhnlichen Quadrantelektrometer in der Dolezalekschen Form kann man bequem noch  $L = 25 \text{ mVcm/Skt.}$  erreichen. Dagegen erlaubt das Hoffmannsche Vakuum-Duantenelektrometer, bis zu den überaus kleinen Ladungswerten von  $L = 1 \text{ mVcm/Skt.}$  und darunter vorzudringen. In dieser Reihe bedeuten wohl die mit dem Comptonelektrometer

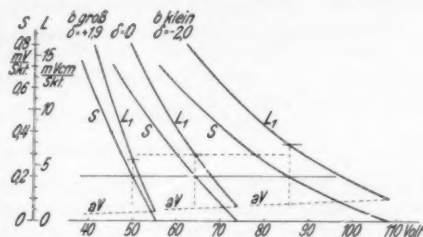


Fig. 8

1) Die Angaben sind zusammengestellt in Wien-Harms, Hdbch. d. Experimentalphys. X. S. 73 u. f.



erreichten Werte von  $L = 5 \text{ mVcm/Skt.}$  und weniger ein recht gutes Ergebnis. Das Vakuum-Duantenelektrometer verhält sich zwar bei  $L = 5$  noch stabiler als das Comptonelektrometer, doch wird dieser Vorteil verringert durch die außerordentliche Schwierigkeit der Handhabung. Bau und Handhabung des Comptonelektrometers sind jedenfalls mit viel kleinerer Mühe verbunden. Mit  $L$  noch wesentlich unter  $5 \text{ mVcm/Skt.}$  herabzugehen, hat bei einem nichtevakuierten Instrument wenig Sinn, da dann die Eigenaktivität der Metallteile zu große Störungen verursacht, wie sich dies auch bei dem nichtevakuierten Hoffmannlektrometer gezeigt hat.<sup>1)</sup>

#### Zusammenfassung

An Hand der Theorie werden die Bedingungen untersucht, die das Comptonelektrometer zu einem empfindlichen Ladungsmeßinstrument gestalten. Ein hiernach gebautes Instrument wird eingehend untersucht. Man kann mit ihm bis zu der maximalen, für Meßzwecke noch brauchbaren Leistungsfähigkeit von rund

$$5 \text{ mVcm/Skt.} = 34\,900 \text{ Elementarquanten/Skt.}$$

vordringen. Die Meßsicherheit wächst, wenn geringe elektrostatische Astasierungen verwandt und nur kleine Kapazitäten mit dem Instrument verbunden werden.

Der Helmholtz-Gesellschaft danke ich für mannigfache Hilfsmittel, die mir auch zu diesen Versuchen nützliche Dienste leisteten.

1) K. Engel u. W. S. Pforte, a. a. O.

Danzig-Langfuhr, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule, im Juli 1933.

(Eingegangen 27. Juli 1933)



## Über das Immersionsobjektiv der geometrischen Elektronenoptik<sup>1)</sup>

Von H. Johannson

(Aus dem Forschungs-Institut der AEG.)

(Mit 22 Figuren)

Inhalt: Einleitung. — I. Meßanordnungen: a) Das Meßimmersionsobjektiv; b) Die photographische Ausrüstung; c) Potentialfeldmessung. — II. Experimentelles Material: a) Einfluß des Abstandes von Kathode und Gitterblende auf Gitterspannung und Vergrößerung; b) Einführung des Spannungsverhältnisses; c) Umwertung der Messungen für den praktischen Gebrauch des Immersionsobjektivs; d) Weitere Systemeigenschaften. — III. Die Bildfehler: a) Die Bildfeldwölbung; b) Der Astigmatismus; c) Bildfehler infolge ungünstiger Versuchsbedingungen; d) Die chromatische Abweichung; e) Die sphärische Aberration. — IV. Verbesserungsmöglichkeiten und Vergleich verschiedener Systeme: a) Einige Verbesserungsmöglichkeiten; b) Vergleich verschiedener Systeme; c) Das „optimale“ Objektiv. — V. Zusammenfassung.

Das elektrische Elektronenmikroskop, das bereits vielfach<sup>2)</sup> zur Untersuchung der Emissionsverteilung auf Kathoden und ihrer zeitlichen Veränderung Anwendung gefunden hat, besteht aus zwei unmittelbar vor der Kathode angeordneten ebenen Lochblenden (Figg. 1 und 2). Die Lochblenden bilden einen Kondensator, dessen Potentialfeld beim Anlegen von Spannung aus den Blendenöffnungen herausquillt. Das so entstandene Potentialfeld, das durch die vor die eine Blendenöffnung ge-

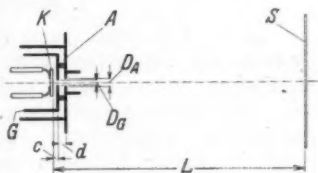


Fig. 1. Schematischer Schnitt durch das Immersionsobjektiv

1) Gekürzte Dissertation T. H. Berlin (einger. 26. 6. 33).

2) E. Brüche u. H. Johannson, Naturw. 20. S. 49, 353. 1932; Ann. d. Phys. [5] 15. S. 145. 1932; Phys. Ztschr. 33. S. 898. 1932. Es sei auch auf die Kathodenuntersuchungen mit dem magnetischen Elektronenmikroskop hingewiesen, M. Knoll, F. G. Houtermans u. W. Schulze, Ztschr. f. Phys. 78. S. 340. 1932; E. Ruska, Ztschr. f. Phys. 83. S. 492. 1933.

brachte Kathode etwas verformt wird, hat eine sammelnde Wirkung auf die aus der Kathode austretenden Elektronen. Es bedingt, daß auf einem in geeigneter Entfernung auf-



Fig. 2.  
Elektrisches Immersionsobjektiv

gestellten Leuchtschirm das vergrößerte Bild der Kathodenoberfläche auftritt, ganz ähnlich wie durch das Objektiv eines Mikroskops. Da es sich um ein Beschleunigungssystem handelt, das die Elektronen von dem Gebiet eines elektronenoptischen Brechungsindex in das eines anderen überführt, sei es als Immersionsobjektiv bezeichnet. Eine genaue Untersuchung der optischen Eigenschaften des elektronenoptischen Immersionsobjektivs fehlte bisher. Diese Lücke auszufüllen, ist das Ziel vorliegender Arbeit. Dabei soll so vorgegangen werden, daß die Änderung geometrischer bzw. elektrischer Daten in ihrem Einfluß auf die optischen Eigenschaften untersucht werde.

#### I. Meßanordnungen

In der Lichtoptik kann man bei Variation eines optischen Systems die Zusammenhänge zwischen den geänderten geometrischen Abmessungen und den geänderten Medien einerseits und der Brennweite bzw. der Abbildungsgüte andererseits unmittelbar vergleichen. In der geometrischen Elektronenoptik ist dieser Vergleich dagegen nicht unmittelbar durchführbar. Hier muß man die unsichtbaren Potentialflächen, auf deren Variation irgendwelche Systemänderungen schließlich hinauslaufen, erst besonders bestimmen. In der Elektronenoptik sind also nicht nur die *Eigenschaftsänderungen* des Systems bei irgendwelchen Variationen zu beobachten, sondern gleichzeitig die damit verbundene *Änderung der Potentialflächen* festzulegen. Demzufolge sind zur Durchführung unserer Aufgabe zwei Schritte notwendig. Nach Wahl

der geometrischen und elektrischen Größen muß erstens festgestellt werden, welche optischen Eigenschaften das System besitzt (Bildphotographie), zweitens, welche Lage die Potentialflächen haben (Potentialfeldmessung).

a) [Das Immersionsobjektiv zur Messung

Das zur Messung benutzte Lochblendensystem zeigt Fig. 2. Es besteht aus zwei genau ausgerichteten Lochblenden, die als Gitterblende  $G$  (Fig. 1) und Anodenblende  $A$  bezeichnet seien. Als Blendenmaterial diente Molybdänblech, das sich für diesen Zweck als besonders geeignet erwiesen hat. Der Blendendurchmesser betrug normal  $D_G = 1,2$  mm und  $D_A = 1,0$  mm. Die Blechstärke war zu 0,1 mm gewählt worden. Die Blenden wurden auf dem Boden zweier ineinandergestellter Messingtöpfe befestigt, wodurch man elektrische Störfelder wirksam abschirmt. In der früher beschriebenen Anordnung waren Gitter- und Anodenblende unabhängig voneinander auf Einzelreitern montiert und gegeneinander verstellbar. Durch Vorversuche hatten sich Blendenabstände  $d$  von etwa 1 mm als besonders günstig erwiesen. Daher wurden die beiden Blenden bei vorliegender Apparatur auf einem gemeinsamen Reiter aufgebaut. Ihr Abstand wurde durch Zwischenlegen einer Glimmerisolation auf den festen Wert von  $d = 0,95$  mm eingestellt. Der Reiter saß auf einer optischen Bank aus Glas und konnte durch einen Wechselstrommagneten verschoben werden. Auf der Bank war außerdem in der Entfernung  $L$  von der Kathode der Leuchtschirm  $S$  aufgestellt. Die Reiter von Leuchtschirm und Kathode wurden durch Stellschrauben festgehalten und für alle Messungen so eingestellt, daß die Mikroskoplänge  $L = 240$  mm betrug. Die jeweilige Stellung des Reiters wurde auf der Skala der optischen Bank über ein Reflexionsprisma mit einem Fernrohr abgelesen. Der „Nullpunkt“ der auf dem Glasprisma eingezätzten Skala für die  $c$ -Werte (Berührung von Gitterblende und Kathode) wurde so bestimmt, daß über eine Glimmlampe eine Spannungsquelle zwischen Blende und Kathode gelegt und das Mikroskopsystem langsam an die Kathode herangeschoben wurde. In dem Augenblick, in dem die Glimmlampe aufleuchtet, wurde eine Ablesung gemacht. Diese Messung muß bei Betriebstemperatur der Kathode ausgeführt werden, da sonst die Wärmeausdehnung zu Fehlern Anlaß gibt.

Die Untersuchungen wurden mit indirekt geheizten Plan-kathoden aus 0,3 mm starkem Nickelblech durchgeführt. Der Kathodendurchmesser betrug 5 mm. Als Emissionsmaterial diente eine dünne Schicht von feinkörnigem Bariumoxyd. In

diese Schicht wurden mittels einer angeschliffenen Nadel parallele Striche eingeritzt, um so aus dem Leuchtschirmbild sogleich die Vergrößerung zu ersehen.

#### b) Die photographische Ausrüstung

Zu jedem Meßpunkt wurde das Leuchtbild photographiert. Die Aufnahmen wurden im Maßstab 1:1 mit einem Zeiss-Tessar 1:2,7 auf Format  $9 \times 12$  gemacht, wobei wegen der besseren Randschärfe auf 1:3,1 abgeblendet wurde. Als Plattenmaterial war für den mit Zinksulfid-Silber bestäubten Leuchtschirm Perutz „Persenso“ gut geeignet, so daß Belichtungszeiten von 3—7 Sek. ausreichend waren.

#### c) Potentialfeldmessung

Die bekannte Meßmethode<sup>1)</sup> des elektrolytischen Troges beruht auf der Analogie zwischen dem elektrischen Strömungsfeld und dem elektrostatischen Potentialfeld. Dabei ersetzt man das zu untersuchende System durch ein vergrößertes Modell, hängt es in einen Wassertrog hinein und greift die Spannungen der verschiedenen Elektroden am Meßdraht einer Wheatstoneschen Wechselstrombrücke ab. Das Aufsuchen der Potentialflächen geschieht dann in der Weise, daß beim Abtasten der Wasseroberfläche mit einer Nadel, die über einen Kopfhörer an einem Schiebekontakt der Brücke liegt, dauernd auf Tonminimum eingestellt wird.

Bisher war durch Abtasten der Wasseroberfläche nur die Behandlung ebener Probleme durchgeführt worden, wobei die „elektrische Spiegelung“ sich dahin auswirkt, daß ein kurzes Meßmodell, z. B. ein Zylinderkondensator oder ein Dreileiterkabel, das dabei vertikal stehend bis zum Boden des Gefäßes reichen muß, als unendlich ausgedehnt vorgetäuscht wird. Zur Ausmessung des Immersionsobjektivs wurde die Meßmethode des elektrolytischen Trogs auch auf rotationssymmetrische Anordnungen ausgedehnt. Zu diesem Zweck wurde ein axialer Halbschnitt des maßstäblich vergrößerten Objektivs derart in den Trog gehängt, daß die Schnittfläche in der Wasseroberfläche lag. Die Spiegelung an der Wasseroberfläche hat jetzt die Wirkung, als ob der obere Teil des halbierten Meßmodells ebenfalls vorhanden sei.

1) C. L. Forbes u. S. W. Fernsworth, *Proc. Amer. Inst. El. Eng.* 32. S. 757. 1913; W. Estorff, *ETZ.* 37. S. 61. 1916; W. Zschagge, *ETZ.* 46. S. 1215. 1925; H. Barkhausen u. J. von Brück, *ETZ.* 8. S. 175. 1933.

## II. Experimentelles Material

### a) Einfluß des Abstandes von Kathode-Gitterblende auf Gitterspannung und Vergrößerung

Die Versuche wurden an dem vorstehend beschriebenen Objektiv (Blendendurchmesser  $D_G = 1,2$  mm und  $D_A = 1,0$  mm, Blendenabstand  $d = 0,95$  mm) durchgeführt.

Nach sehr gründlichem Evakuieren auf  $p < 10^{-5}$  mm Hg-Säule (Kühlung durch flüssige Luft) heizen wir die Kathode und legen bei zunächst willkürlichem Abstände  $c$  von Kathode-Gitterblende, z. B.  $c = 2$  mm, die Spannung  $U_A = 750$  Volt an die Anodenblende und eine Spannung  $U_G$  von z. B. 200 Volt an die Gitterblende (Spannungen auf Kathode bezogen). Dabei entsteht auf dem Leuchtschirm zunächst kein Bild, sondern im allgemeinen nur ein heller Schein, da das sammelnde Potentialfeld noch nicht so beschaffen ist, daß alle von einem bestimmten Kathodenpunkt in verschiedenen Richtungen ausgehenden Elektronen auf dem Leuchtschirm im Bildpunkt zusammentreffen. Die Einstellung auf Bildschärfe läßt sich bei Konstanz der Größen  $D_G$ ,  $D_A$  und  $d$  durch Verändern des Abstandes  $c$  oder durch Änderung der Spannungen vornehmen. Für die Messung ist es am einfachsten, die geometrischen Größen konstant zu lassen und die Spannungen zu ändern, und zwar die Gitterspannung  $U_G$ , da bei Variation der Beschleunigungsspannung  $U_A$  die Leuchtintensität des Schirmes sehr stark schwanken würde. Bei Änderung der Gitterspannung erhalten wir bei  $U_G = 140$  Volt das Bild der Kathodenfläche.

Wir wollen unsere Messungen damit beginnen, die Abhängigkeit der Gitterspannung  $U_G$  vom Abstand  $c$  bei  $U_A = 750$  Volt festzulegen. Das Ergebnis ist in Fig. 3 wiedergegeben. Bei Betrachtung der Kurve fällt auf, daß für Abstände  $c < 0,5$  mm die Gitterspannung  $U_G$  so hohe negative Werte annehmen kann, ohne daß die Elektronen vollständig abgebremst werden. Warum keine Abbremsung erfolgt, zeigt das in Fig. 3 wiedergegebene Potentialfeld für negative Gitterspannung. Man erkennt, daß die negativen Potentialflächen um die Blendenöffnung herumgreifen und daß die Potentialfläche Null senkrecht auf die Kathode aufsetzt. Diese Eigentümlichkeit des Potentialfeldes, die natürlich nur bei negativen  $U_G$ -Werten auftreten kann, hat mehrere Konsequenzen. Zunächst gibt sie eine Erklärung für die soeben ausgesprochene auffällige Beobachtung, daß auch bei negativen Gitterspannungen ein Bild entstehen kann. Außerdem erkennt man, wie die Potentialfläche Null auf der Kathode

einen Bereich abgrenzt, über den hinaus<sup>1)</sup> keine Abbildung mehr möglich ist. Schließlich zeigt sich die praktische Möglichkeit, daß sich durch Umgeben der Kathodenoberfläche mit

einem Metalltrichter (Punktraster) mit nur einer Blende eine der entsprechenden Zweiblenden-Anordnung gleichwertige Abbildung erzeugen läßt.

Zu jedem Meßpunkt der Kurve  $U_G = f(c)$  Fig. 3 wurde

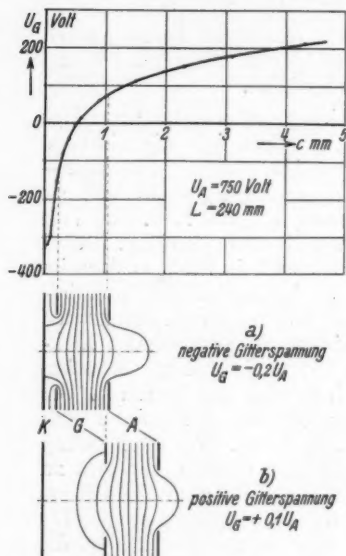


Fig. 3. Gitterspannung  $U_G$  über dem Abstand Kathode-Gitterblende  $c$  bei  $U_A = \text{const}$  und Potentialfelder des Immersionsobjektivs bei verschiedenen Systemstellungen für den Fall der Bildentstehung

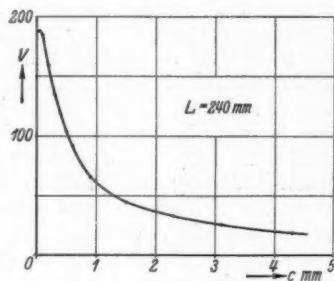


Fig. 4. Vergrößerung  $V$  über dem Abstand Kathode-Gitterblende  $c$  bei  $U_A = \text{const}$  und  $L = \text{const}$

das Elektronenbild photographiert und die zugehörige lineare Vergrößerung durch Vergleich der Abstände der abgebildeten mit den in die Kathode eingesetzten Striche bestimmt. Die Abhängigkeit der Vergrößerung  $V$  vom Abstand  $c$  ist in Fig. 4 wiedergegeben. Der Kurvenverlauf ist angenähert hyperbolisch, wie wir es von der optischen Sammellinse her kennen. Aus der Gestalt der Kurve dürfen wir jedoch keine quantitativen Schlüsse ziehen, denn es ist zu bedenken, daß die Länge  $c$  kein

1) Die Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen ist hierbei nicht in Betracht gezogen.

*Berichtigung*

In der Arbeit H. Johansson, Über das Immersionsobjektiv der geometrischen Elektronenoptik, Bd. 18, H. 4, S. 385, 1933 ist die Fig. 2 versehentlich auf dem Kopfe stehend abgedruckt worden und ist hier zum überkleben beigefügt.



**Fig. 2.**  
**Elektrisches Immersionsobjektiv**

1875  
The following is a list of the names of the persons who have been elected to the office of the President of the United States since the year 1789.



Bezugsmaß im optischen Sinne ähnlich der Objektweite, sondern eine willkürlich gewählte Meßstrecke ist. Für abnehmenden Abstand  $c$  wächst die Vergrößerung  $V$ , da die brechenden Flächen dann näher an die Kathode heranrücken und die negative Gitterspannung gleichzeitig so eingestellt wird, daß eine stärkere Krümmung der kathodennahen Potentialflächen, also eine erhöhte resultierende Brechkraft entsteht, wie es die beiden Potentialfelder für positive und negative Gitterspannungen in Fig. 3 veranschaulichen.

#### b) Einführung des Spannungsverhältnisses

Nachdem die  $c$ -Variation durchgeführt ist, sei der Einfluß der Anodenspannung auf die Vergrößerung betrachtet. Vom Ablenkondensator und von der Einzellinse<sup>1)</sup> wissen wir, daß in der Elektronenoptik für die Richtungsänderung des Strahlenganges stets nur das Verhältnis aus der Strahlggeschwindigkeit und dem ablenkenden Feld maßgebend ist. Es werde geprüft, wie weit diese theoretische Aussage auch für das Immersionsobjektiv zutrifft. Dazu wählen wir bei konstanten geometrischen Abmessungen verschiedene Anodenspannungen und prüfen, ob die Bildschärfe stets bei einem festen Quotienten aus beiden Spannungen auftritt und ob die Vergrößerung erhalten bleibt. Die Meßergebnisse sind in Tab. 1 eingetragen.

Tabelle 1  
für  $c = 0,25$  mm

$U_A$ Volt	$U_G$ Volt	$U_G / U_A$	$V$
500	- 102	- 0,204	161
750	- 152	- 0,203	161
1900	- 204	- 0,204	160

Nach den Meßwerten ist also tatsächlich die Vergrößerung von der Anodenspannung unabhängig und der Quotient aus Gitter- und Anodenspannung konstant. Erwähnt sei, daß die Messung auch für andere Abstände  $c$  bei dem in diesem Abschnitt behandelten Objektiv und bei Objektiven mit besonders geformten Blenden durchgeführt wurde. Stets ergaben sich konstante Quotienten  $U_G/U_A$  mit einem Fehler von höchstens 1 %. Diese Tatsache wurde bei der Einzellinse dazu benutzt, die Beschleunigungsspannung und die Linse an phasengleiche Wechselspannungen zu legen, was für das

1) H. Johannson u. O. Scherzer, Ztschr. f. Phys. 80. S. 183. 1933.

Immersionsobjektiv also auch möglich ist. Der physikalische Sinn dieses allgemein elektronenoptischen Gesetzes ist der, daß trotz der Geschwindigkeitsänderung die Elektronenbahnen erhalten bleiben, wenn nur der Quotient  $U_G/U_A$  konstant bleibt. Daher ist der Quotient  $U_G/U_A$  als „natürliche Abszisse“ zu betrachten, die wir von jetzt ab an Stelle des Abstandes  $c$  einführen wollen. Die folgenden Kurven verlieren dadurch zwar etwas an unmittelbarer Anschaulichkeit, wir werden aber sogleich sehen, daß der Spannungsquotient für den praktischen Gebrauch des Immersionsobjektivs dem Abstand  $c$  als Abszisse vorzuziehen ist.

c) Umwertung der Messungen  
für den praktischen Gebrauch des Immersionsobjektivs

Bei der Untersuchung über die Variation des Abstandes Kathode-Gitterblende hatten wir die Gitterspannung  $U_G$  und die Vergrößerung  $V$  in Abhängigkeit von  $c$  aufgetragen. Wir zeichnen die Kurven nun um, indem wir als Abszisse  $U_G/U_A$  wählen. Fig. 5 zeigt den Verlauf von  $c = f(U_G/U_A)$ . Für kleiner werdende  $U_G/U_A$  verringert sich der Abstand  $c$  zunächst sehr stark, bei negativem  $U_G/U_A$  dagegen nur noch

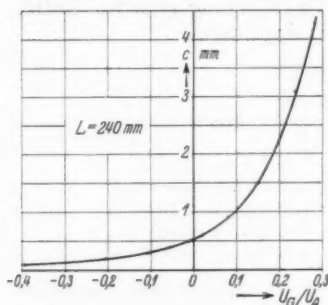


Fig. 5. Abstand Kathode-Gitterblende  $c$  über dem Quotienten  $U_G/U_A$  bei  $L = \text{const}$

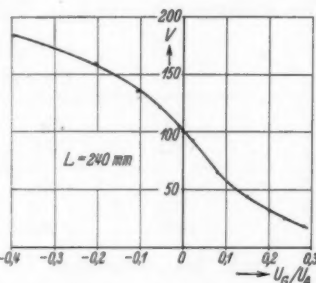


Fig. 6. Vergrößerung  $V$  über dem Quotienten  $U_G/U_A$  bei  $L = \text{const}$

wenig. Der Kurvenverlauf bleibt für verschiedene Mikroskoplängen  $L$  annähernd unverändert, wenn nur die Mikroskoplänge groß gegen die Länge des wirksamen Potentialfeldes bleibt, was praktisch stets zutrifft.

Der besonders praktische Wert der Umzeichnung von  $V = f(c)$  in  $V = f(U_G/U_A)$  (Fig. 6) liegt darin, daß man aus zwei Spannungsablesungen sofort die Vergrößerung bestimmen

kann und dadurch die umständliche Ablesung des Abstandes  $c$  mittels Fernrohr vermeidet. Diese Kurve kann als Eichkurve des elektrischen Immersionsobjektivs bezeichnet werden. Sie läßt sich für Objektive mit beliebiger Blendenform und festem Abstand  $d$  unschwer mit einem Fehler von 1% aufnehmen. Hierbei muß die Gesamtlänge  $L$  des Mikroskops konstant bleiben, was den praktischen Anforderungen in den meisten Fällen entspricht.

Kennen wir die Vergrößerung des Objektivs, so können wir sogleich eine zweite Kurve zeichnen, die im Gegensatz zu  $V = f(U_G/U_A)$  von der Mikroskoplänge  $L$  unabhängig ist. Zu diesem Zweck berechnen wir die Brennweite  $f_r = \frac{L \cdot V}{(1 + V)^2}$ , indem wir das System als eine dünne Linse auffassen. Da der Strahlengang in Wirklichkeit krummlinig ist, soll die Brennweite als „reduzierte Brennweite“ bezeichnet werden. Die so errechnete Kurve zeigt Fig. 7.

Betrachten wir den speziellen Fall  $U_G/U_A = +0,1$  und den zugehörigen Abstand  $c = 1,1$  (vgl. Fig. 5), so ist zu erkennen, daß die Objektweite  $a$  größer als die Länge des Systemaufbaues  $l = c + d$  ist. Führt man diese Betrachtung allgemein durch, so ergibt sich, daß diese Feststellung für alle Systemstellungen zutrifft. In Fig. 7 ist außer der Brennweite  $f_r$ , die wegen  $L \gg f_r$  mit genügender Näherung der Objektweite  $a$  gleichgesetzt werden kann, die zugehörige Länge des Systemaufbaues  $l = c + d$  als gestrichelte Kurve eingetragen. Demnach muß trotz des geringen Abstandes der elektronensammelnden Flächen von der Kathode die Ersatzzellinse in einer Entfernung  $a$  aufgestellt werden, die größer als die wirksame Länge des Potentialfeldes ist.<sup>2)</sup>

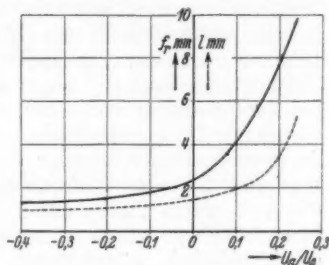


Fig. 7. Reduzierte Brennweite  $f_r$  über dem Quotienten  $U_G/U_A$

1) Folgt unmittelbar durch Einsetzen von  $L = a + b$  und  $V = \frac{b}{a}$

$$\text{in } \frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

2) Aus diesen Feststellungen ergibt sich, daß der in Naturw. 20. S. 49. 1932 gezeichnete Strahlengang, der damals mit dem entsprechenden Vorbehalt gegeben wurde, die Achse nicht innerhalb des Systems, sondern erst in einiger Entfernung schneiden muß.

Die Messungen über die Vergrößerung bzw. die reduzierte Brennweite führen uns noch auf eine wichtige Feststellung. Sie besagt nämlich, daß für sehr kleine Abstände Kathode-Gitterblende ( $c/D_G < 0,1$ ) die wirksame Länge des Potentialfeldes sich nicht mehr wesentlich verkürzen läßt, d. h. die reduzierte Brennweite  $f_r$  strebt für negative  $U_G/U_A$ -Werte einem Endwert zu. Daher muß sich auch die Vergrößerung einem festen Wert nähern, wofür in Fig. 4 das Abweichen der Kurve  $V = f(c)$  für kleine  $c$ -Werte eine Andeutung gibt. Eine weitere Steigerung der Vergrößerung läßt sich dann nur noch durch verkleinerte Blendendurchmesser und verringerten Blendenabstand erreichen.

Wenn auch die Ersatzeinzellinse zur bequemerem Darstellung der Abbildungsgesetze beiträgt, so kann man auf diese Weise jedoch nicht alle Eigenschaften des Potentialfeldes erfassen. So muß z. B. das Öffnungsverhältnis des elektrischen Immersionsobjektivs gesondert betrachtet werden. Für das Öffnungsverhältnis  $d/f$  der geometrischen Lichtoptik ergibt sich bei der Ersatzeinstelllinie mit der reduzierten Brennweite  $f_r$  ein wirksamer Linsendurchmesser, der im wesentlichen durch den Anodenblendendurchmesser bzw. durch den Öffnungswinkel bestimmt ist. In Wirklichkeit ist aber der Öffnungswinkel des von einem Punkt der Kathode ausgehenden Elektronenbündels nahezu gleich  $\pi$ , denn wegen ihrer geringen Austrittsgeschwindigkeit können fast alle von einem Punkte ausgehenden Elektronen durch das Potentialfeld gesammelt und zur Abbildung benutzt werden. Demnach spielen in diesem Fall die Blendenöffnungen für den wahren Öffnungswinkel nur eine untergeordnete Rolle. Das Immersionsobjektiv ist also wesentlich lichtstärker, als es sich nach den geometrischen Abmessungen und der reduzierten Brennweite ergeben würde.

#### d) Weitere Systemeigenschaften

*Die Ströme.* Den Messungen über die Abbildungsgesetze und Abbildungseigenschaften des einfachen Lochblendensystems wollen wir noch eine Untersuchung der Ströme anfügen. Wenn auch die Ströme nicht nur von  $U_G/U_A$  abhängig sind, sondern auch von  $U_G$  für sich, so ist aus Gründen der Einheitlichkeit auch hier  $U_G/U_A$  als Abszisse gewählt worden (Fig. 8). Im allgemeinen werden die Kurven für andere Anodenspannungen einen bis zu einem gewissen Grade ähnlichen Verlauf zeigen, da die Emission beim elektrischen Immersionsobjektiv im allgemeinen den Sättigungswert nicht erreicht. Für negative Werte von  $U_G/U_A$  bleiben die Ströme

zu den Blenden, zum Leuchtschirm und zu dem Abschirmnetz, mit dem das Innere des Mikroskops ausgekleidet ist, auf verhältnismäßig kleinen Werten. Kurz nachdem die Gitterspannung positiv geworden ist, ergibt sich für alle Stromkurven fast gleichzeitig ein Maximum. Dieses entsteht dadurch, daß mit wachsender Gitterspannung  $U_G$  ( $U_A = \text{const}$ ) der Emissionsstrom bis zur Sättigung ansteigen würde, wenn nicht gleichzeitig der Abstand Gitter-Kathode nach einem annähernd hyperbolischen Gesetz vergrößert werden müßte (vgl. Fig. 3). Die Höhe des Gitterstrommaximums ist im wesentlichen durch die Fläche des emittierenden Bereiches der Kathode bestimmt. Bei hohem Gitter emittiert die gesamte Kathodenoberfläche annähernd gleichmäßig. Die spezifische Emission ergibt sich dann als

$$\frac{\text{Gesamtemission}}{\text{emittierende Kathodenoberfläche}},$$

also beispielsweise für das Strommaximum bei  $U_G/U_A = +0,1$  bei einem Kathodendurchmesser von 5 mm als  $\frac{0,3}{0,2} = 1,5 \text{ mA/cm}^2$ . Bei negativen  $U_G/U_A$  bleibt die spezifische Emission in derselben Größenordnung. Zwar verringert sich die Gesamtemission in starkem Maße, gleichzeitig schrumpft aber auch derjenige Bereich der Kathodenoberfläche zusammen, aus dem bei den herrschenden Feldverhältnissen die Elektronen austreten können (vgl. Fig. 3a). Für  $U_G/U_A = -0,1$  ergibt sich z. B. eine spezifische Emission von  $\frac{0,02}{0,02} = 1,0 \text{ mA/cm}^2$ .

In Fig. 8 ist ferner der Verlauf des Schirmstromes in 10facher Überhöhung wiedergegeben. Trotz der geringen Schirmströme von rund  $1 \cdot 10^{-6} \text{ Amp.}$  ist die Leuchtintensität auf dem Schirm auch für visuelle Beobachtungen vollkommen ausreichend.

Ein Einfluß des Emissionsstromes auf die Abbildungsgesetze des Systems war in weiten Grenzen nicht festzustellen. Wenn bei verschieden starker Heizung dennoch eine Abhängig-

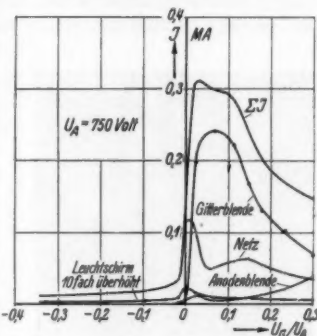


Fig. 8. Ströme an den Elektroden des Immersionsobjektives bei  $U_A = \text{const}$

keit auftritt, so ist diese im allgemeinen durch die Wärmeausdehnung der Kathode (Änderung des Abstandes  $c$ ) oder durch Gasabgabe bei zu hoher Kathodentemperatur bedingt.

*Der scharf abgebildete und der ausgeleuchtete Bereich.* Die auf dem Leuchtschirm entstehenden Abbildungen der Kathode



Fig. 9. Elektronenmikroskopisches Bild einer Bariumdampfkathe<sup>1)</sup> nach längerem Brennen in 70facher Vergrößerung. Der Kreis grenzt den scharf abgebildeten Bildbereich ab

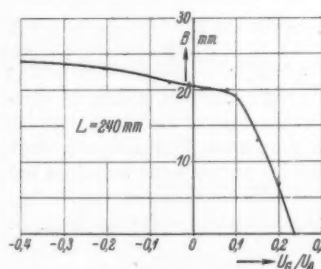


Fig. 10.  
Scharf abgebildeter Bildbereich  $B$   
über dem Quotienten  $U_G/U_A$

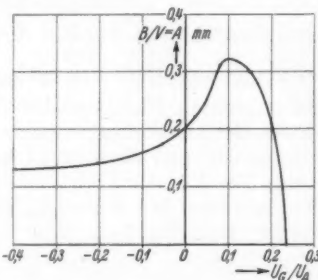


Fig. 11.  
Scharfer Kathodenbereich  $A$   
über dem Quotienten  $U_G/U_A$

Um festzustellen, wie groß der Durchmesser des scharf abgebildeten Bereiches  $A$  der Kathodenoberfläche ist, muß der Bereich  $B$  (Fig. 9 und 10) durch die jeweilige Vergrößerung  $V$

1) E. Brüche u. H. Johannson, Ztschr. f. Phys. 84. S. 56. 1933.

(Fig. 6) dividiert werden. Das Ergebnis zeigt Fig. 11. Die Kurve  $A = f(U_G/U_A)$  hat bei  $U_G/U_A = +0,1$  ein Maximum. Für höhere Werte von  $U_G/U_A$  wird das System bald unbrauchbar, da für wachsende  $U_G/U_A$  die Vergrößerung sinkt, ohne daß der Durchmesser des scharf abgebildeten Bereiches  $B$  entsprechend wächst.

Der Bereich  $B$  des Leuchtschirmbildes ist von einem kontinuierlich leuchtenden Bereich  $k$  umgeben, der von Strahlen herrührt, die infolge der Bildfehler nicht auf den Schirm zum Schnitt kommen. Fig. 12 zeigt die Abhängigkeit des ausgeleuchteten Bereiches  $k$  von  $U_G/U_A$ . Für positive  $U_G/U_A$ -Werte wirkt eine der beiden Blenden als Gesichtsfeldblende, d. h. unmittelbar an der Begrenzung der Blenden vorbeigehende Strahlen (Randstrahlen) können den Leuchtschirm gerade noch erreichen. Rückt nun das System näher an die Kathode heran, so ist schon rein geometrisch zu erwarten, daß der Öffnungswinkel, der durch Blendenrand und Kathodenmitte gebildet wird, sich entsprechend vergrößert. Demnach müßte der ausgeleuchtete Bereich  $k$  anwachsen, was der Versuch für positive  $U_G/U_A$ -Werte auch bestätigt. Für negative  $U_G/U_A$ -Werte wurde unter IIa (Fig. 3a) gezeigt, daß die Potentialfläche Null den emittierenden Kathodenbereich zusammenschnürt. Diese Potentialfläche wirkt demnach für den ausgeleuchteten Bereich als verengte Gesichtsfeldblende und verhindert ein weiteres Anwachsen von  $k$  für negative  $U_G/U_A$ . Auf diese Weise entsteht bei der Kurve  $k = f(U_G/U_A)$  in der Nähe von  $U_G/U_A = 0$  das ausgeprägte Maximum.

**Einfluß der geometrischen Systemabmessungen.** Würde man ein vorgegebenes Abbildungssystem geometrisch ähnlich auf das doppelte vergrößern und dabei die angelegten Spannungen unverändert lassen, dann müßte sich auch das Potentialfeld geometrisch ähnlich räumlich vergrößern. Es wäre demnach zu erwarten, daß der Spannungsquotient  $U_G/U_A$ , der bei dem Abstand  $c_1$  des Normalsystems auf dem Leuchtschirm ein scharfes Bild erzeugt, dann unverändert bleibt, wenn man den Abstand Kathode-Gitterblende der zweifach

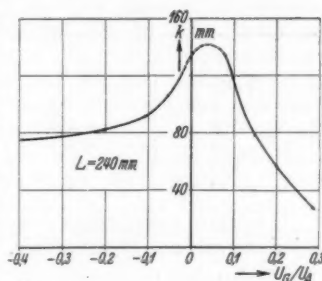


Fig. 12. Ausgeleuchteter Bereich  $k$  über dem Quotienten  $U_G/U_A$



vergrößerten Blendenanordnung ebenfalls auf den doppelten Wert bringt, also auf  $c_2 = 2c_1$ . Außerdem müßte die Vergrößerung für das vergrößerte System ( $V_2$ ) auf den halben Wert des Normalsystems ( $V_1$ ) sinken, wenn die Mikroskoplänge  $L$  für beide Versuche konstant gehalten wird, ähnlich, wie in der Lichtoptik die Vergrößerung einer Einzellinse auf die Hälfte sinkt, wenn man in der doppelten Gegenstandsweite eine Linse mit doppelten Krümmungsradien aufstellt.<sup>1)</sup>

Tabelle 2

Für  $L = 240$  mm.  $U_A = 750$  Volt

$U_G$ Volt	$U_G/U_A$	$c_2/c_1$	$V_2/V_1$
- 150	- 0,2	2,00	0,55
- 75	- 0,1	2,03	0,55
0	0	1,95	0,54
+ 75	+ 0,1	1,98	0,53

Unsere Vermutungen bestätigen sich durch das in Tab. 2 wiedergegebene Meßergebnis. Für gleiche Spannungsquotienten  $U_G/U_A$  an beiden Systemen ergibt sich für das zweifach vergrößerte System stets der doppelte  $c$ -Wert des Normalsystems, was durch die Konstanz des Quotienten  $\frac{c_2}{c_1} = 2$  zum Ausdruck gebracht wird. Um zu prüfen, ob die Vergrößerung für das vergrößerte System die Hälfte des Normalsystems ist, wird der Quotient  $V_2/V_1$  gebildet. Die Abweichung vom Sollwert  $\frac{V_2}{V_1} = 0,5$  beträgt im Mittel  $8\%$ .<sup>2)</sup>

Der Einfluß des Blendenabstandes  $d$  wurde experimentell nicht weiter verfolgt, da Vorversuche die besten Abbildungseigenschaften für möglichst kleine  $d$ -Werte ( $d = 0,5 - 1,0 D_G$ ) ergeben hatten. Wenn wir das System nicht ähnlich vergrößern, sondern z. B. den Gitterblendendurchmesser  $D_G$  und

1) Voraussetzung ist dabei, daß sowohl im elektrischen wie auch im lichtoptischen Fall die Gegenstandsweite klein gegenüber der Bildweite ist.

2) Nach Abschluß der Meßreihe stellte sich heraus, daß der Blendenabstand  $d = 0,95$  mm des Normalobjektivs durch zu starkes Zusammenpressen der Glimmerisolation um  $5\%$  zu wenig vergrößert worden war, wodurch sich die entstandene Abweichung zwanglos erklären läßt. Daß eine Verringerung des Blendenabstandes  $d$  eine stärkere Vergrößerung hervorruft, ist in der Verkürzung des wirksamen Potentialfeldes begründet, die dann außerdem die erforderliche stärkere Krümmung der kathodennahen Potentialflächen bewirkt, so daß die Gitterspannung in gewissen Grenzen kaum nachreguliert werden braucht.



die Abstände  $c$ ,  $d$  unverändert lassen und nur den Anodenblendendurchmesser  $D_A$  variieren, so treten erfahrungsgemäß nur verhältnismäßig geringe Änderungen auf. Für wachsende Anodenblendendurchmesser  $D_A$  verringert sich die Vergrößerung etwas, da das wirksame Potentialfeld länger wird und mehr aus der Anodenblende herausquillt, als bei kleinen Anodenblendendurchmessern.

### III. Die Bildfehler

Bei der Betrachtung der Bildfehler möge unterschieden werden zwischen denen, die auf der Achse Null sind, um dann mit zunehmender Entfernung von der Bildmitte anzuwachsen und solchen, die im ganzen Bereich einen ziemlich gleichmäßigen Einfluß haben, daher eine allgemeine Verschlechterung der Bildgüte hervorrufen. Von den Bildfehlern der erstgenannten Gruppe, die also auf den Bildbereich eine eingrenzende Wirkung haben, seien die Bildfeldwölbung und der Astigmatismus behandelt. Dann folge eine Untersuchung der chromatischen Abweichung und der sphärischen Aberration, die der zuletzt erwähnten Gruppe angehören.

Hier sei angemerkt, daß die Messungen der Bildfehler, ausgenommen der chromatischen Abweichung, zeitlich später als die bisherigen Untersuchungen und daher an einem verbesserten System ausgeführt wurden. Dieses System hatte an der Gitterblende einen trichterförmigen Ansatz, wie es in Fig. 18 u. 21 zu sehen ist. Die Kurven des neuen Systems sind denen des einfachen Lochblendensystems so ähnlich, daß wir sie für die folgenden Betrachtungen, bei denen es nur auf das Systematische ankommt, aus Gründen der Platzersparnis ohne weiteres zum Vergleich mit den Kurven, die mit dem einfachen Lochblendensystem erhalten wurden, benutzen können.

#### a) Die Bildfeldwölbung

Es sei zunächst die Bildfeldwölbung betrachtet, die auf die Abbildung besonders störend einwirkt. Zur Bestimmung dieses Fehlers könnte man einfach so vorgehen, daß man nach Entstehen des scharfen Bildes in Schirmmitte den Schirm verschiebt und feststellt, bei welchen Stellungen die einzelnen Ringbezirke der Kathode scharf abgebildet werden. Aber schon aus praktischen Gründen scheint es angebracht, die Bildfeldwölbung nach einer etwas anderen Methode zu bestimmen. Es wird dabei ein Weg gewählt, der zwar keine direkten Schlüsse auf die räumliche Lage der Bildschale im

einzelnen zuläßt, dagegen durch leicht auszuführende Spannungsmessungen einen bequemen Vergleich der Bildfeldwölbungen eines Systems bei verschiedenen Brennweiten ermöglicht. Dabei wird durch Änderung des Verhältnisses  $U_G/U_A$  die Bildschale längs der Achse verschoben, wobei der Ort des Schirms festbleibt. In Fig. 13 ist für drei verschiedene Systemstellungen, für zwei Reihen negativer und eine Reihe positiver Werte von  $U_G/U_A$ , der mittlere Durchmesser  $d_G$  des scharf abgebildeten Ringbereiches auf der Kathode über  $U_G/U_A$  aufgetragen. Aus Gründen der Anschaulichkeit wurde für die Untersuchung des betrachteten Systems  $U_G/U_A$  als Abszisse eingeführt (veränderliche Gitterspannung bei  $U_A = \text{const}$ ), wenn auch kein

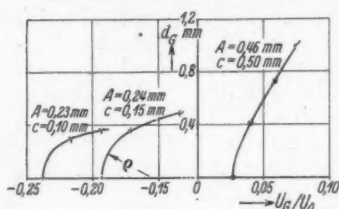


Fig. 13. Zur Bildfeldwölbung. Durchmesser des scharf abgebildeten Ringbereiches der Kathode über dem Quotienten  $U_G/U_A$  bei festem Abstand  $c$

Grund vorhanden ist, daß verschiedene miteinander zu ver-

gleichende Systeme bei konstantem Wert  $U_G/U_A$  die gleiche Brechkraft besitzen. Die drei in Fig. 13 wiedergegebenen Kurven zeigen, und ebenso auch sämtliche bisher untersuchten Immersionsobjektive, daß die Randbezirke eines Bildes durch Erhöhung von  $U_G/U_A$  scharf einstellbar sind. Das Bild wird also bei Steigerung von  $U_G/U_A$  in der Mitte unscharf und

der scharf abgebildete Bezirk wandert ringförmig nach außen. Eine Erhöhung von  $U_G/U_A$  bei konstanten geometrischen Abmessungen bedeutet in Kathodennähe eine Verringerung der Krümmung der Potentialflächen und erhöhtes Potentialgefälle. Die Elektronenbahnen werden dann also weniger gekrümmt und die Brennweite  $f_r$  wird verlängert. Demnach sind die Brennweiten des Systems für achsenfernere Punkte des abzubildenden Objekts kürzer als für achsennahe. Das Bildfeld ist demnach von der Kathode aus gesehen konvex. Als Maß für die Bildfeldwölbung, die bei einem bestimmten  $c$ -Wert auftritt, können wir die Krümmung  $\frac{1}{\rho}$  der Kurve  $d_G = f(U_G/U_A)$  für  $d_G = 0$  ansehen. Wären die Kurven in Fig. 13 nicht gekrümmt, so wäre dies ein Zeichen dafür, daß die Bildfeldwölbung beseitigt ist. In Fig. 13 ist noch der Durchmesser des bei Scharfstellung der Bildmitte scharf abgebildeten Kathodenbereiches  $A$  als Funktion von  $U_G/U_A$  angeschrieben. Man sieht, daß einer schwächeren Krümmung ein größerer

Wert von  $A$  entspricht. Aus dieser Feststellung kann man schließen, daß die Größe des abgebildeten Bereiches von der Bildfeldwölbung maßgebend beeinflußt wird. Wir werden später sehen, welche Möglichkeit zur Hebung der Bildfeldwölbung auf experimentellem Wege besteht.

#### b). Der Astigmatismus

Im vorigen Abschnitt haben wir von der Bildfeldwölbung schlechthin gesprochen. Genau genommen hat man zwischen der tangentialen und der sagittalen Bildschale zu unter-

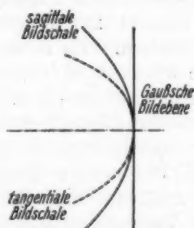


Fig. 14. Schematische Darstellung der Lage der Bildschalen beim untersuchten Immersionsobjektiv



Fig. 15. Verzeichnung eines oberhalb der optischen Achse gelegenen Bildpunktes infolge Astigmatismus. a) gehobener Astigmatismus, b) Verzerrung eines Objektpunktes in peripherer Richtung, wenn das Bild in der tangentialen, c) Verzerrung in radialer Richtung, wenn das Bild in der sagittalen Bildschale aufgefangen wird

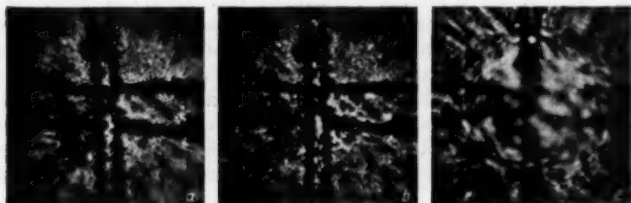


Fig. 16. Zum Astigmatismus: a) Ein auf Bildmitte scharf eingestelltes Schirmbild, b u. c) astigmatische Verzerrung in den Außenbezirken

scheiden (Fig. 14). Eine Verschiedenheit der Krümmungen beider Schalen wirkt sich in einer Auseinanderzerrung der Bildpunkte nach dem in Fig. 15 gezeigten Schema (Astigmatismus) aus.

Fig. 16 zeigt die Aufnahme von 3 mit einem Kreis umschlossenen Meßpunkten aus Fig. 13. Bei Bild a ist die Bildmitte scharf eingestellt. Der mittlere Durchmesser des scharf abgebildeten Ringbezirkes auf der Kathodenoberfläche ist dann  $d_g = 0$ . Bei Steigerung von  $U_G/U_A$  wandert dann dieser Ring-

bezirk nach außen (Bild b), bis er schließlich in Bild c infolge des Astigmatismus nur noch andeutungsweise erkennbar ist. Die Lage der Bildschalen können wir aus Bild c entnehmen. Innerhalb des Ringbezirkes sind die Objektpunkte peripherisch verzeichnet und außerhalb des Ringbezirkes werden die Dingpunkte mit radialer Verzerrung wiedergegeben. Demnach liegt bei dem untersuchten Immersionsobjektiv die tangentielle Bildschale innerhalb der sagittalen.

#### c) Fehler durch ungünstige Versuchsbedingungen

Die oben behandelten Bildfehler bedingen Unschärfen, die mit der Entfernung von der Bildmitte zunehmen und keinen Einfluß in der optischen Achse haben. Es sollen nun die Fehler besprochen werden, die ihre störende Wirkung dem ganzen Bildbereich überlagern. Um jedoch diese eigentlichen Bildfehler, die also durch die geometrische Gestalt und Abmessung der Elektroden des Abbildungssystems gegeben sind, von den Fehlern zu trennen, die auf ungünstige Versuchsbedingungen zurückzuführen sind, sei zunächst noch in einer Bemerkung über einige experimentelle Vorbedingungen Raum gegeben.

Ebenso wie in der Lichtoptik beim Mikroskop dafür zu sorgen ist, daß keine zerstreuen Medien, z. B. trübes Glas oder Rauch im Strahlengang vorhanden sind, so muß man auch beim Elektronenmikroskop darauf achten, daß die Elektronenstreuung an Gasresten gering bleibt. Für das elektrische Immersionsobjektiv ist ein Vakuum von  $p < 10^{-5}$  mm Hg-Säule wünschenswert. Besonders ist darauf zu achten, daß kein nennenswerter Gasaustritt aus der Kathode in ihrer Nähe einen höheren Druck hervorruft, denn ein erhöhter Gasdruck in Kathodennähe ist wegen der kleinen Elektronengeschwindigkeit von großem Einfluß. Bei unzulässig hohem Gasdruck verringert sich die Vergrößerung etwas und das Leuchtbild bekommt einen aufgehellten Untergrund. Weiter gesteigerter Gasgehalt ruft eine Zusammenschnürung der Bildmitte hervor, so daß eine kissenförmige Verzeichnung entsteht. Bei starken Vergrößerungen ist die Gasempfindlichkeit geringer als bei schwachen. Diese Tatsache läßt sich dadurch erklären, daß das Abbildungssystem für schwache Vergrößerungen länger ist als für starke und damit die Elektronenbahnen wegen des geringeren Anfangsgefälles sich durch Gasionen leichter ablenken lassen.

Eine weitere leicht vermeidbare Fehlerquelle ist die unter Umständen auftretende Aufladung des Glasleuchtschirmes, die

man durch Überziehen der Glasplatte mit einer durchsichtigen Metallschicht vor Aufbringen der Leuchtmasse vermeiden kann. Wandladungen und gegen Anode geladene Metallteile wird man am besten durch Anbringen von auf Anodenpotential gelegten Netzen unwirksam machen.

Ferner bedingt bei starken Vergrößerungen eine unebene oder rauhe Kathodenoberfläche starke Fehler, was besonders für Oxydkathoden mit groben Oxydkörpern zutrifft. Die „Rauigkeit“ ruft in zweierlei Hinsicht eine Verzeichnung der Abbildung hervor. Erstens lassen sich die verschiedenen Erhöhungen auf der Kathodenoberfläche nicht gleichzeitig scharf einstellen, sondern man kann nur eine durch das Objekt gelegte Schnittebene gut abbilden und zweitens treten auch in dieser Ebene noch dadurch Verzeichnungen auf, daß durch die Unebenheiten die Potentialflächen in Kathodennähe verzeichnet werden, also gerade dort, wo die Elektronen wegen ihrer geringen Anfangsgeschwindigkeit sich am leichtesten beeinflussen lassen. Zur Hebung dieses Fehlers hat es sich bewährt, die Kathodenoberfläche mit einem Ölstein, der in eine Parallelführung eingespannt wurde, plan zu schleifen. Dieses Verfahren hat für Oxydkathoden wegen der Oxydkörner weniger Bedeutung, lohnt sich dagegen sehr bei reinen Metall- oder Aufdampfkathoden.

Bei den bisherigen Untersuchungen läßt sich die soeben beschriebene Fehlerquelle in kleinen Grenzen halten, so daß sich die Objektmittle recht scharf abbilden läßt. Es wäre aber denkbar, daß eines der Endziele der Elektronenoptik, nämlich die Konstruktion eines „Übermikroskops“, mit dem man wegen der gegenüber den Lichtwellen um Größenordnungen kürzeren Wellenlänge der schnellen Elektronen theoretisch noch Objekte von der Größe eines Moleküls auflösen könnte, an der Rauigkeit des abzubildenden Gegenstandes scheitert.

#### d) Die chromatische Abweichung

Wir wollen annehmen, daß die eben besprochenen experimentellen Vorbedingungen erfüllt sind und dazu übergehen, die noch verbleibenden, über den ganzen Bildbereich verteilten Bildfehler zu untersuchen. Zunächst soll festgestellt werden, ob die verschiedenen Geschwindigkeiten, mit denen die Elektronen aus der Kathode austreten (thermisches Verteilungsgesetz), merkbare chromatische Abweichungen hervorrufen. Wenn solche Fehler vorhanden sind, müssen sie bei hohen Anodenspannungen geringer werden. Es wurden daher zwei Elektronenbilder miteinander verglichen, die bei konstanten geometrischen Systemabmessungen, aber bei verschiedenen

Anodenspannungen, 500 und 1000 Volt (vgl. Tab. 1), auftraten. Es zeigte sich, daß zwischen diesen Bildern sowohl in der Bildschärfe als auch in der Größe des scharf abgebildeten Bildbereiches auch nicht andeutungsweise ein Unterschied erkennbar ist. Daraus ist zu schließen, daß die Geschwindigkeitsverteilung der austretenden Elektronen gegenüber dem Potentialgefälle in Kathodennähe nur eine untergeordnete Rolle spielt.

Wie weit die Anodenspannung verringert werden muß, bis die chromatischen Fehler Einfluß gewinnen, interessiert hier insofern nicht, als das Immersionsobjektiv mit Rücksicht auf die notwendige Leuchtschirmintensität selten unter 500 Volt benutzt wird.

#### e) Die sphärische Aberration

Die sphärische Aberration hat in der Regel nur einen verhältnismäßig geringen Anteil an der Herabsetzung der Bild-

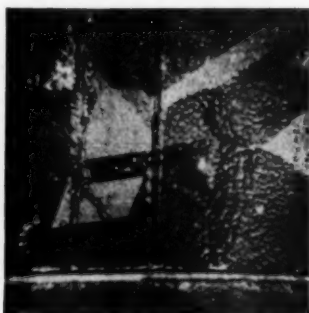


Fig. 17. Nickelkristalle einer mit Bariumazid pastierten Kathode. Die scharfen Kristallgrenzen lassen auf geringe sphärische Aberration schließen. (Vergrößerung 65fach)

güte, denn die Leuchtschirmbilder sind in der Mitte von erfreulicher Schärfe (Fig. 17). Das gilt für das benutzte System für alle mehr als 60fachen Vergrößerungen. Geht man dagegen zu geringeren Vergrößerungen über, so findet man eine wachsende Unschärfe auch in der Bildmitte. Das bedeutet, daß die Form des Potentialfeldes des Mikroskopsystems für diese kleinen Vergrößerungen ungünstig gewählt ist. Als Maß für die Bildgüte auf der optischen Achse wird man, wie in der Lichtoptik, den Durchmesser eines Objektes von solcher Ausdehnung bezeichnen, das auf dem Leuchtschirm gerade noch

zu erkennen ist. Bei dem Original des in Fig. 17 wiedergegebenen Kristallbildes ergaben sich die Durchmesser der kleinsten Objektpunkte zu  $5\mu$ . Wenn man in Betracht zieht, daß die Konturen dieser kleinen Emissionszentren noch recht gut sind, so scheint es kein weiter Schritt mehr zu sein, das Auflösungsvermögen des normalen Lichtmikroskops zu erreichen oder gar zu übertreffen.



Es ist von methodischem Interesse, wodurch die Vergrößerung der Bildgüte bei kleinen Vergrößerungen hervorgerufen wird. Wir wollen daher näher darauf eingehen.

Geringere als 60fache Vergrößerung bedeutet bei dem untersuchten System einen Abstand  $c > 1$  mm und einen Spannungsquotienten  $U_G/U_A > +0,1$ . Ist dieser Punkt überschritten, tritt auch in der Bildmitte eine rasch steigende Unschärfe auf, die sich durch Variieren der Spannung nicht mehr beseitigen läßt. Dieses Verhalten drückt sich in den Kurven des scharf abgebildeten Bildbereiches *B* (Fig. 10) und des zugehörigen scharfen Kathodenbereiches *A* (Fig. 11) durch den steilen Abfall aus.

Bevor auf eine Erklärung der Ursachen der sphärischen Aberration eingegangen werden soll, möge die Wirkungsweise<sup>1)</sup> des Immersionsobjektivs an einem Ersatzmechanismus etwas ausführlicher veranschaulicht werden, wodurch sich die folgenden Betrachtungen dann besonders vereinfachen.

Wir fassen das im elektrolytischen Topf ausgemessene Potentialfeld als eine hügelige Landschaft auf, in der die Höhe dem jeweiligen Potentialwert entspricht.

Denken wir uns eine Kugel, die durch die hügelige Landschaft rollt, so ist die Geschwindigkeit der Kugel der Geschwindigkeit des Elektrons proportional, sofern wir das Vorzeichen der Höhe so gewählt haben, daß die der Kathode *K* entsprechende Gerade am höchsten liegt.<sup>2)</sup> Die Potentiallinien im unteren Teil der Fig. 18 entsprechen dann den Höhenlinien der Landschaft.

Die darüber gezeichnete Kurve zeigt einen Schnitt in der Symmetrieebene. Diese Schnittlinie entspricht der optischen Achse des Potentialfeldes, und wir wollen sie im folgenden kurz als „Achse“ bezeichnen. Verläßt die Kugel die Kathodenmitte in Richtung dieser Schnittlinie, so wirkt auf sie keine seitliche Kraft und behält ihre Richtung bei. Die Kugel entspricht dann einem längs der optischen Achse fliegenden Elektron. Verläßt dagegen die Kugel die Kathode unter einem Winkel gegen die Achse, so treten auch Querbeschleunigungen auf und die Kugel wird dann eine krumme Bahn durchfliegen.

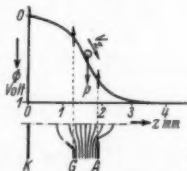


Fig. 18. Zur Analogie zwischen Potentialfeld und hügeliger Landschaft

1) Vgl. auch W. Rogowski, E. u. M. 51. S. 249. 1933.

2) Die Analogie ist vollständig, wenn die senkrechte Geschwindigkeitskomponente klein gegen die horizontale Komponente ist und wenn man vom Trägheitsmoment der Kugel absieht.

Der Zusammenhang zwischen diesen Querschleunigungen und der Form der Schnittlinie  $S$  ergibt sich theoretisch aus der Bedingung  $\Delta\varphi = 0$ , der das Potentialfeld unterworfen ist. Hiernach muß ein nach oben gewölbtes Stück der Schnittkurve  $S$  in einer Mulde gelegen sein, während ein im umgekehrten Sinne gekrümmtes Kurvenstück auf einem Grat liegen muß (Fig. 19). Nun wird auf eine neben der Achse in einer Mulde rollende Kugel außer der Längsbeschleunigung noch eine auf die Achse zu gerichtete Querschleunigung wirksam sein. Die Mulde übt also eine Sammelwirkung aus. Umgekehrt entspricht einem Grat eine Zerstreuungswirkung. Schauen wir uns daraufhin die früher gezeigten Potentialfelder in Fig. 3 an, so erkennen wir, daß die Elektronen auch in diesem Falle zuerst durch eine Mulde und dann über einen Grat laufen. Bei einiger Gewöhnung erkennt man schon rein anschaulich die Gestalt der Hügellandschaft beim Betrachten der Potentialfelder.

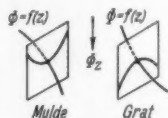


Fig. 19. Zur Formulierung der Bedingung  $\Delta\varphi = 0$

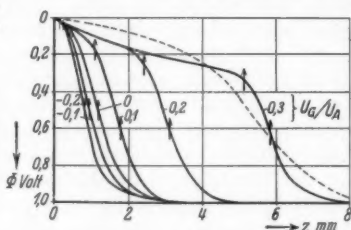


Fig. 20. Potentialverlauf längs der Achse für verschiedene Systemstellungen

Wir wollen nun die Konsequenzen dieser Überlegungen für die sphärische Aberration ziehen. Fig. 20 zeigt für verschiedene Systemstellungen, also für verschiedene  $c$ - bzw.  $U_G/U_A$ -Werte, die Ergebnisse der Potentialfeldmessungen längs der Achse. Beim Vergleich dieser Potentialkurven miteinander erkennt man, daß sich die Sammelwirkung der an der Kathode beginnenden Mulde mit wachsendem  $U_G/U_A$  allmählich verringert, da die Krümmung von  $\Phi = f(z)$  in Kathodennähe abnimmt. Die schräg von der Kathode abfliegenden Elektronen bekommen dann in dieser flachen Mulde bereits eine verhältnismäßig hohe Geschwindigkeit und können dann im weiteren Verlauf der Bewegung um so weniger gesammelt werden, je höher die Geschwindigkeit ist. Somit vergrößert sich mit wachsendem  $U_G/U_A$  die Brennweite der Anordnung. Die Zerstreuungswirkung des auf die Mulde folgenden Grates



können wir für diese Betrachtungen außer acht lassen, da die durch ihn hervorgerufene Ablenkung wegen der dort schon hohen Steifigkeit der Elektronen nur eine untergeordnete Rolle spielt.

Die Kurven  $\Phi = f(z)$  zeigen bis  $U_G/U_A = +0,1$  den normalen, eben beschriebenen Verlauf, nach welchem das Elektron zuerst eine Sammel- und dann eine Zerstreuungslinse durchläuft, wobei der abgebildete Bereich brauchbare Werte beibehält. Dagegen ist  $U_G/U_A = +0,2$  und besonders bei  $U_G/U_A = +0,3$  eine Abweichung vom Normalverlauf von  $\Phi = f(z)$  zu erkennen. Die aus der Kathode austretenden Elektronen werden wegen der nun in Richtung der positiven  $\Phi$ -Achse ausgebauchten Kurve  $\Phi = f(z)$  in Kathodennähe zunächst zerstreut und später erst wieder gesammelt. In diesem Falle ist die Zerstreuungswirkung wegen der noch geringen Geschwindigkeit der Elektronen von großem Einfluß. Die von einem Kathodenpunkt büschelförmig austretenden Elektronen werden nicht mehr, wie im Normalfall, gesammelt, sondern noch weiter geöffnet. Diese extrem weiten Bündel verursachen dann eine stark ausgeprägte sphärische Aberration, so daß die Abbildungen oberhalb von  $U_G/U_A = +0,1$  rasch unbrauchbar werden.

Man könnte noch eine Reihe weiterer Bildfehler untersuchen, die zu besprechen aber erst dann notwendig erscheint, wenn die Bildfeldwölbung wesentlich behoben ist. So wäre besonders auch der Fall denkbar, daß bei einem System mit geringer sphärischer Aberration und beseitigter Bildfeldwölbung die Randbezirke noch dadurch Unschärfen aufweisen, daß die Abbesche Sinusbedingung, wie sie aus der Lichtoptik bekannt ist, nicht erfüllt ist.

#### IV. Verbesserungsmöglichkeiten und Vergleich verschiedener Systeme

##### a) Einige Verbesserungsmöglichkeiten

Für eine rechnerische Erfassung der Bildfehler des Immersionsobjektivs<sup>1)</sup> reichen die theoretischen Kenntnisse elektronenoptischer Systeme noch nicht aus. Das liegt daran, erstens im allgemeinen die Medien der Elektronenoptik kontinuierlich veränderliche Brechungsindizes haben gegenüber

1) Die magnetische und elektrische Einzellinse ist bereits in einigen Arbeiten theoretisch behandelt worden: O. Scherzer, *Ztschr. f. Phys.* **80**. S. 193. 1933; W. Glaser, *Ztschr. f. Phys.* **80**. S. 451; **81**. S. 647; **83**. S. 104. 1933; J. Picht, *Ann. d. Phys.* [5] **15**. S. 926. 1932; *Ztschr. f. techn. Phys.* **6**. S. 239. 1933.

den sprunghaften Änderungen des Brechungsindex an den brechenden Flächen der Lichtoptik und daß zweitens die Elektronengeschwindigkeit in Kathodennähe gegen Null geht, wenn man von der Austrittsgeschwindigkeit absieht. Daher wird man vorerst die Verbesserungen des Systems Schritt für Schritt durch systematische *experimentelle* Untersuchungen erreichen wollen, wenn es auch schwierig erscheint, die letzten Feinheiten eines Abbildungssystems auf diese Weise zu erhalten. Wir wollen nun daran gehen, einige Möglichkeiten der experimentellen Systemverbesserung zu diskutieren.

*Zur Behebung der sphärischen Aberration.* Wie früher gezeigt wurde, hat bei dem untersuchten System die sphärische Aberration für starke Vergrößerungen verhältnismäßig geringe Werte. Für Vergrößerungen unterhalb 60 fach, also bei  $U_G/U_A > +0,1$  bzw. bei einem Abstand Kathode-Gitterblende  $c > 1$  mm, trat dieser Bildfehler jedoch so stark auf, daß keine brauchbare Abbildung zu erzielen war. Die besprochene schädliche Zerstreuungswirkung in Kathodennähe, auf die die hohe sphärische Aberration zurückzuführen ist, kommt dadurch zustande, daß dann der Abstand  $c$  für  $U_G/U_A > +0,1$  in die Größenordnung des Kathodendurchmessers kommt. Wegen des zu großen Abstandes  $c$  haben dann die aus der Gitterblende herausquellenden Potentialflächen keinen genügenden Einfluß mehr auf die kathodennahen Potentialflächen, so daß diese Flächen, die um die relativ kleine Kathode herumgreifen, jetzt der Kathode die konkave Seite zukehren, also statt der erwünschten Sammel- eine Zerstreuungswirkung ausüben. Diese Störung wird man durch einen vergrößerten Kathodendurchmesser oder als Notbehelf durch Anbringen eines Schirmbleches in der Ebene der Kathode weitgehend kompensieren. Die Versuche ergaben für solche abgeschirmten Kathoden eine gewisse Verringerung der sphärischen Aberration bei hohen  $U_G/U_A$ -Werten. Wenn auch die störende Wirkung der sphärischen Aberration bei solcher Abschirmung erst bei höheren  $U_G/U_A$ - bzw.  $c$ -Werten als im unabgeschirmten Zustande beginnt, so läßt sie sich jedoch auf diese Weise nicht vollständig aufheben. Die Ursache ist darin zu sehen, daß auch nach der Abschirmung die Elektronen bei  $U_G/U_A > +0,1$  zunächst eine größere Wegstrecke mit kleinerer Geschwindigkeit durchlaufen. Obgleich durch die Abschirmung der Kathode eine Zerstreuungswirkung in Kathodennähe vermieden ist, bleibt die Öffnung der von der Kathode ausgehenden Bündel wegen der allzu flachen Mulde sehr groß, wodurch die sphärische

Aberration immer noch merkbare Werte beibehält. Die vorstehende Untersuchung zeigt, daß die sphärische Aberration bei dem benutzten Immersionsobjektiv fast ausschließlich bei schwachen Vergrößerungen wirksam ist und dadurch eine untere Vergrößerungsgrenze des Systems bedingt. Diese Vergrößerungsgrenze läßt sich durch Anbringen eines Schirmbleches wesentlich herabsetzen. Auf diese Weise waren noch bei 30facher Vergrößerung gute Bilder zu erzielen, wohingegen die untere Grenze der guten Abbildung ohne Abschirmung etwa 60facher Vergrößerung lag.

*Zur Behebung der Bildfeldwölbung.* Wie die früheren Messungen in Abschnitt IIIa zeigen, muß der Behebung der Bildfeldwölbung besonderes Interesse entgegengebracht werden. Wir haben gesehen, daß die Bildschale des untersuchten Systems von der Kathode aus gesehen konkav ist, d. h. die reduzierten Brennweiten für achsenentfernte Objektpunkte sind kürzer als die für den Objektmittelpunkt. Zur Hebung dieses Fehlers muß demnach die Krümmung der Potentialflächen außerhalb der Achse so lange verringert werden, bis die Brennweiten für alle Punkte des abzubildenden Objekts nur noch unmerkbar verschieden voneinander sind. Während man in der geometrischen Lichtoptik die Linsen durch Schleifen formen kann, ist in der geometrischen Elektronenoptik eine gewünschte Form der brechenden Flächen nur indirekt durch entsprechende Ausbildung der Elektroden zu erreichen. Weiterhin ist zu beachten, daß sich die Potentialflächen nicht beliebig formen lassen, sondern daß stets die Bedingung  $\Delta\varphi = 0$  erfüllt sein muß, was eine Beschränkung bei der experimentellen Verbesserung elektrischer Linsen bedeutet.

Die oben aufgestellte Forderung für das Immersionsobjektiv, daß die Brennweiten für achsenfernere Objektpunkte länger werden sollen, wurde dadurch zu befriedigen versucht, daß die Gitterblende mit wulstförmigen Ansätzen versehen wurde. Eine Formgebung der Anodenblende ist wegen der hohen Elektronengeschwindigkeit erst in zweiter Linie wirksam und wurde daher vorläufig zurückgestellt.

Daß auf diese Weise ein erheblicher Vorteil entsteht, zeigt der Vergleich zwischen den Potentialfeldern des ursprünglichen Systems mit ebenen Lochblenden und dem System mit der geformten Gitterblende (Fig. 3 u. 18). Man sieht, wie durch die trichterförmige Gitterblende in größerer Achsenentfernung die erwünschte Abflachung der kathodennahen Potentialflächen hervorgerufen wird.

## b) Vergleich verschiedener Systeme

Zum Schluß wollen wir noch kurz untersuchen, wie sich die Formgebung der Blenden auf die Güte des Immersionsobjektivs auswirkt. Als Maß für die Güte könnte dabei der Durchmesser des scharfen Bildbereiches  $B$  dienen. Es wäre wünschenswert, daß dieser Bereich für alle Vergrößerungen, die man mit dem System erreichen kann, gleich groß bleibt, daß also ein vorgegebener Schirmdurchmesser stets voll ausgeleuchtet wird. Das Verhältnis des bei einem System zu beobachtenden scharfen Bereiches zu der Mikroskoplänge  $L$  wollen wir als Gütefaktor bezeichnen, also  $\eta = B/L$ . Die so definierte Größe  $\eta$  hat den Vorteil, daß sie sich bei Verschieben des Leuchtschirmes nicht ändert und daß sie bei ähnlicher Vergrößerung des Abbildungssystems konstant bleibt. Sie charakterisiert also die *Gestalt* des Systems und läßt sich nicht durch geänderte Abstandsverhältnisse, sondern nur durch verbesserte Formgebung der Elektroden erhöhen.

Wir wollen nun vier Blendenanordnungen miteinander vergleichen, die in Fig. 21 wiedergegeben sind. Bei diesen

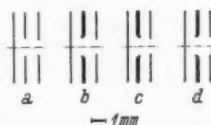


Fig. 21. Vier verschiedene miteinander zu vergleichende Blendenanordnungen: a) Das einfache Lochblendensystem mit ebenen Blenden, b) System mit kathodenseitigem Wulst der Gitterblende, c) System mit anodenseitigem Wulst der Gitterblende und d) System b mit größerer Anodenblende

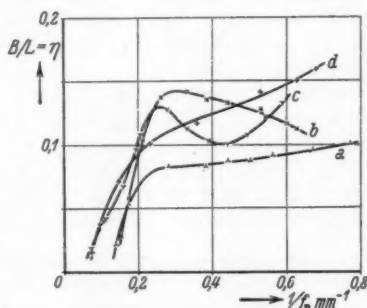


Fig. 22. Gütefaktor  $\eta$  über der reduzierten Brechkraft  $1/f_r$ .

Systemen wurde in der früher besprochenen Weise die reduzierte Brechkraft und der scharfe Bildbereich  $B$  bestimmt. Die Meßergebnisse sind in Fig. 22 aufgetragen. Die Kurven entstanden in der Weise, daß bei jeder Blendenanordnung der Abstand  $c$  zwischen Gitter und Kathode variiert wurde. Es wurde jedoch nicht dieser Abstand  $c$  als Abszisse gewählt, sondern die Brechkraft  $1/f_r$ , da sich in dem praktisch allein interessierenden Fall  $f_r \ll L$  die Vergrößerung durch Multipli-

kation von  $1/f_r$  mit der Mikroskoplänge  $L$  bestimmen läßt. Wir sehen aus den Kurven, daß gegenüber dem einfachen Lochblendensystem alle übrigen einen Fortschritt bedeuten, wobei die Systeme  $b$  und  $d$  sich als besonders gut erweisen. Mit ihnen erreichen wir gegenüber dem einfachen Lochblendensystem im günstigsten Falle ( $1/f_r = 0,3 \text{ mm}^{-1}$  bei  $b$  und  $0,7 \text{ mm}^{-1}$  bei  $d$ ) eine Erweiterung des Durchmessers  $B$  des scharf abgebildeten Bereiches um etwa  $70\%$ .<sup>1)</sup>

Die Verbesserung ist also dadurch erreicht worden, daß ein Doppeltrichter an der Gitterblende angebracht wurde. Dadurch nähern sich die Brennweiten für achsenentfernere Objektpunkte der Brennweite für die Achsenstrahlen. Durch weitere systematische Untersuchungen erscheint es möglich, den Einfluß der Bildfeldwölbung noch mehr zu beheben.

#### c) Das „optimale“ Immersionsobjektiv

Wie haben im vorstehenden bei unseren Immersionsobjekten die Vergrößerung lediglich durch Variieren des Abstandes Kathode-Gitterblende und des Quotienten  $U_G/U_A$  bei konstanter Mikroskoplänge  $L$  in weiten Grenzen variiert. Während man beim Lichtmikroskop für jede Vergrößerung ein anderes Objektiv, Okular oder eine andere Systemlänge benutzen muß, kann man beim Elektronenmikroskop ein und dieselbe Blendenanordnung benutzen. Das hat seinen Grund darin, daß man in der Elektronenoptik in den Spannungsverhältnissen einen weiteren Parameter zur Veränderung des Systems zur Verfügung hat. Man wird jedoch die Anforderung in dieser Richtung nicht übertreiben dürfen, denn es ist nicht zu erwarten, daß bei beliebiger Vergrößerung unter Konstanthaltung der Mikroskoplänge die Bildfehler stets gleiche Größe behalten. Vielmehr wird sich für ein vorgegebenes System in der Regel in einem bestimmten Bereich der Brennweite ein Optimum der Abbildungsgüte ergeben, wie es ja Fig. 22 zeigt.

Will man für eine gewünschte Vergrößerung die optimale Abbildungsgüte eine Blendenanordnung voll ausnutzen, so zeigen sich prinzipiell zwei Möglichkeiten zur Erreichung dieses Zieles. Entweder wird man das System in die optimale Stellung bringen

1) Das Ansteigen der Kurven  $c$  und  $d$  bei großen Werten der Brechkraft könnte zu dem Schluß verleiten, daß die Systeme bei weiter gesteigerten Brechkraften noch besser würden. Die Kurven brechen jedoch plötzlich in dem Augenblick ab, in dem Gitter und Kathode sich berühren.

und dann die Länge des Mikroskops so lange verändern (Verschieben des Leuchtschirms), bis die betreffende Vergrößerung erreicht ist oder man läßt die Mikroskoplänge konstant und stellt ein dem optimalen System geometrisch ähnliches in solchem Maßstab her, daß die verlangte Vergrößerung auftritt. Die erste Methode ist zwar einfach, aber nur so lange anwendbar, als die Mikroskoplänge nicht zu unhandlich wird; dagegen ist die zweite Möglichkeit zu weitgehenden Vergrößerungsänderungen bei optimaler Systemausnutzung brauchbar. Sie findet ihre Grenze erst dadurch, daß die einwandfreie Herstellung von sehr kleinen geformten Blenden äußerst schwierig ist.

#### V. Zusammenfassung

1. Das elektrische Immersionsobjektiv wird einer ausgedehnten Untersuchung unterzogen um seine Eigenschaften kennenzulernen und Wege zu seiner Verbesserung zu finden.

2. Die ersten Messungen werden mit einer aus zwei ebenen Lochblenden bestehenden Anordnung durchgeführt (Durchmesser der Gitterblende  $D_G = 1,2$  mm, der Anodenblende  $D_A = 1,0$  mm), wobei der Abstand der Anodenblende von der Gitterblende fest bleibt; die Entfernung der Gitterblende von der Kathode ist dagegen beliebig einstellbar.

3. Für die einzelnen Systemstellungen werden für den Fall der Bildentstehung (richtig gewählte Potentiale) die zugehörigen Potentialfelder im elektrolytischen Topf ermittelt.

4. Als Einfluß des Abstandes Gitterblende-Kathode wird gefunden, daß die Vergrößerung mit wachsendem Abstand nach einem angenähert hyperbolischen Gesetz abnimmt.

5. Bei festen geometrischen Abmessungen ist die Vergrößerung von der Anodenspannung unabhängig.

6. Geometrisch ähnliche Systemvergrößerungen ergibt eine entsprechend verlängerte Brennweite.

7. Für sehr kleine Abstände Kathode-Gitterblende eines vorgeschriebenen Systems nähert sich die Vergrößerung einem Grenzwert.

8. Die kürzeste mit den untersuchten Systemen erreichte Brennweite ist von der Größenordnung der Blendendurchmesser.

9. An Hand des experimentellen Materials werden Bildfeldwölbung, Astigmatismus, chromatische Abweichung und sphärische Aberration diskutiert.

10. Es wurde ein Gütefaktor definiert, der einen Vergleich verschiedener Systeme hinsichtlich der Ausdehnung des scharfen Bildbereiches ermöglicht.

11. Nach den gewonnenen Erfahrungen wird das einfache Lochblendensystem in verschiedener Weise geometrisch abgeändert (Trichter), wodurch sich der Gütefaktor gegenüber dem einfachen Lochblendensystem um 70% steigern läßt.

12. Der Vergleich der verschiedenen Systeme führt zu einem optimalen Systemtyp und zu einer Regel, wie groß das System zu wählen sei, damit es eine gewünschte Vergrößerung bei optimalem Bildbereich ergibt.

Vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Laboratorium des Forschungs-Instituts der AEG in der Zeit von Juni 1932 bis Juni 1933 auf Anregung von Herrn Dr. Brüche durchgeführt.

Reinickendorf, im August 1933.

(Eingegangen 25. August 1933)



**Zur Ionisation  
der Edelgase durch langsame Alkaliionen  
Von Otto Beeck**

(Mit 2 Figuren)

Die nachfolgenden Zeilen haben einen dreifachen Zweck. Erstens soll ein langgeplanter Vergleich der Messungen des Verfassers<sup>1)</sup> mit denen von Mouzon<sup>2)</sup> vorgenommen werden, was zu wesentlichen Folgerungen führt,

zweitens läßt sich daraus die Frage nach dem quantitativ besten Wert der Ionisierungsfunktion  $K^+$  in  $A$  beantworten und drittens soll der Ordinatenmaßstab der von Beeck und Mouzon<sup>3)</sup> in dieser Zeitschrift veröffentlichten Ionisierungsfunktionen der Edelgase Krypton und Xenon mit sämtlichen Alkaliionen korrigiert werden.

Diese Korrektur, die auch an den Mouzonschen Messungen anzubringen ist, ist darauf zurückzuführen, daß das in beiden Fällen benutzte McLeodmanometer anstatt mit einer Millimeterskala, mit einer Skala in Zwanzigsteln eines englischen Zolls versehen war. Dies war später bei den Publikationen übersehen worden. Da die Skalenabweichung in die Druckmessung quadratisch eingeht, erniedrigen sich die Ordinaten der Kurven von Mouzon<sup>2)</sup> in Neon und Argon und die Kurven von Beeck-Mouzon<sup>3)</sup> in Krypton und Xenon um etwa 38 %.

In Fig. 1 sind die Kurven von Beeck und die korrigierten Kurven von Mouzon und Beeck-Mouzon eingetragen, außerdem die Kurven von Sutton<sup>4)</sup>, Frische<sup>5)</sup> und Nordmeyer<sup>6)</sup> für  $K^+$  in  $A$ , wo besonders große Abweichungen zwischen den Werten der verschiedenen Beobachter vorliegen.

Wesentlich für uns ist nun die Tatsache, daß sich die Mouzonschen Kurven denen des Verfassers im allgemeinen

1) O. Beeck, *Ann. d. Phys.* [5] **6**. S. 1001. 1930.

2) J. C. Mouzon, *Phys. Rev.* **41**. S. 605. 1932.

3) O. Beeck u. J. C. Mouzon, *Ann. d. Phys.* [5] **11**. S. 737. 1931.

4) R. M. Sutton u. J. C. Mouzon, *Phys. Rev.* **37**. S. 319. 1931.

5) C. Frische, *Phys. Rev.* **43**. S. 160. 1933.

6) M. Nordmeyer, *Ann. d. Phys.* [5] **16**. S. 697. 1933.



ausgezeichnet anschließen, bis auf einen Fall nämlich  $K^+$  in A. Dies führt zu wichtigen Schlüssen, wenn man beachtet, daß die Ionisationskammern der beiden Autoren die gestreuten Primärionen prinzipiell verschieden erfassen.

Die ursprüngliche Anordnung des Verfassers (Fig. 2a) läßt erkennen, daß die Primärionen nur dann vollzählig erfaßt werden, wenn Streuung unter großen Winkeln nicht vorliegt. Liegt eine solche Streuung aber vor, so wird N, d. h. die Anzahl der pro Ion auf dem Wege von 1 cm beim Druck von 1 mm Hg erzeugten Elektronen, augenscheinlich zu groß gemessen. Der Plan des Verfassers, der Ionisationskammer daher die Form Fig. 2b zu geben, die sämtliche Primärionen erfaßt, konnte erst in Pasadena bei den Mouzon'schen Messungen zur Ausführung kommen, und ein Vergleich der Kurven (des oben erwähnten Fehlers wegen) erst jetzt vorgenommen werden.

In beiden Apparaturen werden die möglicherweise am Gitter G ausgelösten Sekundärelektronen durch ein kleines positives Potential zwischen der Ionenfalle und dem Gitter unschädlich gemacht, was im Falle Fig. 2b durch den Einbau einer kleinen Batterie in die Elektrometerleitung erreicht

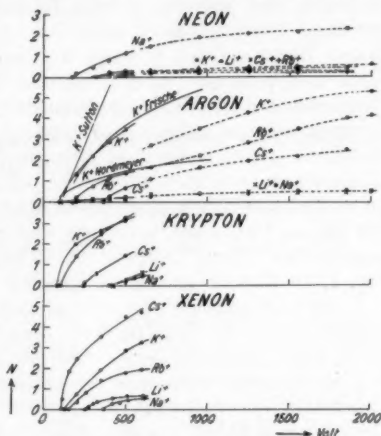
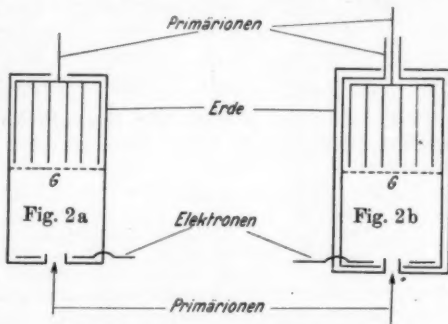


Fig. 1. Die Ionisierungsfunktionen der Edelgase durch Alkaliionen  
—○—○— Beeck  
- - - - - Mouzon



Vergleich der Ionisationskammern von Beeck (Fig. 2a) und Mouzon (Fig. 2b)

ist. Beide Anordnungen verhalten sich daher für den Fall, daß die Primärionen nicht durch große Winkel gestreut werden, identisch und müssen gleiche Resultate geben; während bei Streuung durch große Winkel die Anordnung Fig. 2a zu große Werte liefert. Doch können wir auch im Falle Fig. 2b noch nicht den richtigen Wert erwarten, da die durch große Winkel abgelenkten Primärionen an den Seitenwänden der Ionisationskammer Sekundärelektronen auslösen können, die nicht unschädlich gemacht werden, also einen falschen additiven Elektronenstrom verursachen. Dieser läßt wiederum den Ionisationsquerschnitt zu hoch erscheinen, und der korrekte Wert sollte für diesen Fall noch unterhalb des mit der Anordnung Fig. 2b gemessenen liegen. Diskutiert man unter diesen Gesichtspunkten Fig. 1, so kommt man zu folgenden Resultaten:

Der im allgemeinen ausgezeichnete Anschluß der Ionisierungskurven von Mouzon<sup>1)</sup> an diejenigen von Beeck<sup>2)</sup> (sämtliche Alkaliionen in Neon und Argon) läßt darauf schließen, daß in diesen Fällen eine wesentliche Streuung unter großen Winkeln nicht vorliegt. Diese Kurven von Beeck<sup>2)</sup> und von Mouzon<sup>1)</sup> erheben daher größeren Anspruch auf quantitative Genauigkeit, als ihnen bisher zugesprochen werden konnte.<sup>3)</sup>

Im Falle  $K^+$  in  $A$  hingegen zeigen die Messungen von Beeck und die von Mouzon eine beträchtliche Abweichung, was auf eine beträchtliche Streuung der Primärionen durch große Winkel ( $> 20^\circ$ ) schließen läßt. Es nimmt daher nicht Wunder, daß gerade in diesem Fall die Messungen verschiedener Autoren besonders stark voneinander abweichen. Man hat den richtigen Wert daher noch unterhalb des Mouzonischen Wertes zu suchen, weshalb der Wert von Nordmeyer<sup>4)</sup> wohl als der quantitativ richtigste anzusehen ist.

Karlsruhe, Institut für theoretische Physik der Technischen Hochschule.

1) J. C. Mouzon, a. a. O.

2) O. Beeck, a. a. O.

3) Dies gilt jedenfalls im Bereich kleinerer Ionengeschwindigkeiten. Es muß nämlich bemerkt werden, daß im Falle hoher Energien der Primärionen auch wenige, durch große Winkel gestreute Primärionen eine große Anzahl Sekundärelektronen erzeugen können, so daß die Mouzonischen Werte bei hohen Energien — trotz der Übereinstimmung mit Beeck bei 600 Volt — möglicherweise zu hoch ausgefallen sein könnten.

4) M. Nordmeyer, a. a. O.

(Eingegangen 8. August 1933)

**Experimentelle und theoretische Untersuchungen  
über Dehnungseigenschwingungen von Stäben  
und Röhren.<sup>1)</sup> I**

**Von E. Giebe und E. Blechschmidt**

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt)

(Mit 10 Figuren)

Inhalt: § 1. Einleitung. — § 2. Versuchsanordnung. — § 3. Beobachtete Harmonieabweichungen und Rayleighs Dickenkorrektur. — § 4. Grundlage einer neuen Theorie aus kopplungstheoretischen Vorstellungen. — *Dehnungsschwingungen von Röhren*: § 5. Ableitung der Frequenzformel. — § 6. Diskussion der Frequenzformel, zwei Frequenzserien, tote Zone. — § 7. Das beobachtete Frequenzspektrum bei Nickelröhren. — § 8. Quantitative Prüfung der Theorie, Bestimmung des Kopplungskoeffizienten. — § 9. Messungen an einem Quarzrohr. — *Dehnungsschwingungen von Zylindern*: § 10. Ableitung und Diskussion der Frequenzformel. — § 11. Meßergebnisse.

**§ 1. Einleitung**

Bei piezoelektrischen Quarzresonatoren in Stabform, wie sie heute vielfach in Physik und Technik gebraucht werden, sind häufig die Querdimensionen nicht mehr klein gegen die elastische Halbwellenlänge der erregten Longitudinalschwingung. Wie Giebe und Scheibe<sup>2)</sup> gezeigt haben, treten dann unter Umständen sehr erhebliche Abweichungen von dem bekannten einfachen Gesetz longitudinaler Stabschwingungen auf, das lange, dünne Stäbe voraussetzt. Die Oberschwingungen stehen nicht mehr in ganzzahligen Verhältnissen, sind also nicht mehr harmonisch, die beobachteten Harmonieabweichungen sind auch viel größer als nach der bekannten, genaueren Schwingungsformel von Rayleigh zu erwarten ist, welche die endliche Stabdicke berücksichtigt. Mit Hilfe von Vorstellungen aus der Kopplungstheorie gelang es Giebe und Scheibe, ihre Beobachtungen an Quarzstäben in befriedigender Weise zu deuten

1) Vorgetragen in der Sitzung der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin am 24. Februar 1933.

2) E. Giebe u. A. Scheibe, Ann. d. Phys. [5] 9. S. 93. 1931.

und ihre Meßresultate durch eine auf diesen Vorstellungen beruhende Formel darzustellen. Eine strenge Lösung des Problems auf diesem Wege war jedoch durch die Anisotropie des Bergkristalls sehr erschwert.

Für das Verständnis vieler Erscheinungen, die an piezoelektrischen und auch magnetostriktiven Resonatoren beobachtet wurden, ist eine genaue Kenntnis des Gesetzes der Longitudinalschwingungen von Stäben beliebiger Dicke unentbehrlich. Das Problem der Fortpflanzung von Ultraschallschwingungen in zylindrischen Stäben ist in neuerer Zeit mehrfach Gegenstand experimenteller und theoretischer Untersuchungen gewesen<sup>1)</sup>, die aber bisher zu keinem in weitem Frequenzbereich anwendbaren und durch Beobachtungen bestätigten Gesetz geführt haben. Mit dem Ziele, ein solches Gesetz auf Grund der Erkenntnisse zu finden, die in der eingangs erwähnten Untersuchung an Quarzstäben gewonnen wurden, haben wir Untersuchungen über hochfrequente Longitudinalschwingungen von *isotropen* Stäben und Röhren ausgeführt, die aus ferromagnetischen Stoffen (Nickel und Nickellegierungen) bestanden und mit Hilfe der Magnetostriktion zu Schwingungen angeregt wurden. Wir sind mit Hilfe einer neuen Theorie für Rohre zu einer Lösung gelangt, die sich bei der experimentellen Prüfung in dem ganzen der Messung zugänglichen Frequenzbereich bis herauf zu 800 000 Hz als vollständig streng erweist. Diese Theorie liefert auch für zylindrische und rechteckige Stäbe Frequenzformeln, die bis zu sehr hohen Oberschwingungen mit den Beobachtungen in bestem Einklang sind.

## § 2. Versuchsanordnung

Zur Anregung von Dehnungsschwingungen ferromagnetischer Stäbe durch Magnetostriktion und zum Nachweis derselben haben wir die kürzlich von uns ausführlich beschriebene Anordnung benutzt.<sup>2)</sup> Sie enthält im wesentlichen zwei über den Stab geschobene Spulen, die Anregungs- und die Induktorspule. Die erstere, die mit Wechselstrom regelbarer Frequenz eines Röhrensenders beschickt wird, erzeugt periodische Längenänderungen durch den Jouleeffekt, die zweite, die

1) Insbesondere von R. Ruedy, *Canad. Journ. Res.* 5. S. 149. 1931; 7. S. 86. 1932; G. S. Field, ebenda 6. S. 619. 1931; K. Röhrich, *Ztschr. f. Phys.* 73. S. 813. 1932, hier auch ausführliches Literaturverzeichnis. R. W. Boyle u. D. O. Sproule, *Canad. Journ. Res.* 5. S. 601. 1931.

2) E. Giebe u. E. Blechschmidt, *Ann. d. Phys.* [5] 11. S. 905. 1931.

in einem Detektorkreis mit Kristalldetektor und Spiegelgalvanometer liegt, dient zum Nachweis der Resonanz zwischen elektrischen und elastischen Schwingungen vermöge des reziproken Effekts. Der Stab ruht auf Schneiden in der Achse einer Magnetisierungsspule, die mit Gleichstrom beschickt wird.

Besondere Vorsichtsmaßregeln waren wegen des hohen Temperaturkoeffizienten des Elastizitätsmoduls des Nickels ( $2 \times 10^{-4}$  pro Grad) erforderlich. Neben der Wasserkühlung als Schutz gegen Wärmestrahlung von der Magnetisierungsspule mußten auch Erwärmungen durch Wirbelströme im Hochfrequenzfeld tunlichst vermieden werden. Die zur Erregung dienenden Hochfrequenzströme wurden daher so klein als möglich gewählt. Um den Einfluß des Magnetfeldes auf den Elastizitätsmodul möglichst klein zu halten, um also Fehler durch den  $\Delta E$ -Effekt zu vermeiden, wurden nach unseren früheren Erfahrungen hartgezogenes Nickel sowie Indilatans (eine dem Invar ähnliche harte Nickel-Eisen-Legierung) als Versuchsmaterialien verwendet, außerdem wurde die Gleichstrommagnetisierung so hoch gewählt, daß kleine Feldänderungen praktisch ohne Einfluß auf die Eigenfrequenzen der Stäbe blieben. Die Auswahl harten Materials gewährleistete zugleich eine geringe Dämpfung.

Die Frequenzmessung erfolgte mit einem Normalfrequenzmesser, der eine Genauigkeit von etwa  $0,5-1\%$  für den Absolutwert der Frequenz hat. Die durch die Eigenschaften des Versuchsmaterials wie Dämpfung, Temperaturkoeffizient, und  $\Delta E$ -Effekt entstehenden Meßfehler sind im ungünstigsten Falle von derselben Größe.

Bei der angewandten Erregungsart der elastischen Schwingungen kann es etwas fraglich erscheinen, ob die Stäbe oder Rohre als hinreichend isotrop anzusehen sind aus folgenden Gründen: 1. Nach unseren früheren Untersuchungen nimmt der Modul proportional mit der Magnetisierungsintensität  $J$  zu, nun ist aber  $J$  wegen der entmagnetisierenden Wirkung der Enden längs des Stabes nicht überall konstant, sondern in der Mitte größer als an den Enden, in entsprechender Weise muß sich also auch der Modul ändern. 2. Ob die longitudinale Magnetisierung eine Änderung des Moduls nur für longitudinale Deformationen oder auch für Deformationen in der dazu senkrechten Richtung zur Folge hat, ist nicht bekannt. Es wäre also möglich, daß durch die Magnetisierung eine elastische Anisotropie in den beiden zueinander senkrechten Richtungen entsteht, was für die vorliegende Untersuchung von Bedeutung sein könnte (vgl. § 14). Wir halten jedoch diese

Bedenken deshalb für wenig wichtig, weil nach unseren früheren Messungen für hartes Nickel der Höchstwert des  $\Delta E$ -Effektes zwischen  $J=0$  und  $J$  (Sättigung) nur rund 1% beträgt.

### § 3. Beobachtete Harmonieabweichungen und Rayleighs Dickenkorrektur

Einen Überblick über den Verlauf der beobachteten Harmonieabweichungen  $\delta$  als Funktion der Ordnungszahl  $k$  der longitudinalen Schwingungen gibt Fig. 1b für einige Nickel-

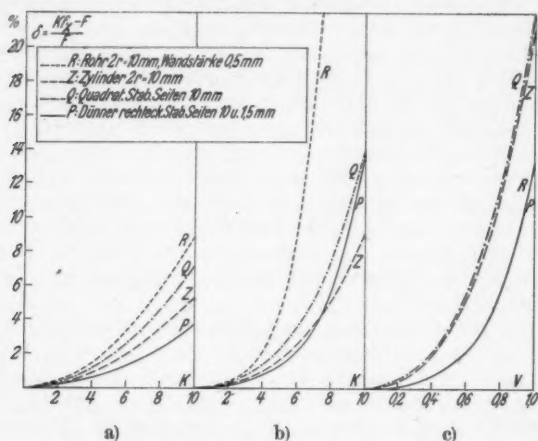


Fig. 1. Harmonieabweichungen  $\delta$

- a) berechnet nach Rayleigh } als Funktion der Ordnungszahl  $k$ ,  
 b) beobachtet  
 c) nach der Kopplungstheorie als Funktion des Verhältnisses  $V$  von  
 axialer zu radialer bzw. lateraler Eigenfrequenz

stäbe gleicher Länge  $x = 100$  mm, aber verschiedener Querschnittsform. Die Harmonieabweichungen sind durch die Gleichung

$$(1) \quad \delta = \frac{k f_z - F}{F}$$

definiert.  $F$  bezeichnet die beobachteten Frequenzen und  $f_z$  ist durch die für sehr dünne und lange Stäbe gültige Formel

$$(2) \quad f_z = \frac{1}{2x} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

bestimmt ( $E$  = Elastizitätsmodul,  $\rho$  = Dichte). Zum Vergleich sind in Fig. 1a die Harmonieabweichungen eingezeichnet, wie

sie sich mit Hilfe der Dickenkorrektur nach Rayleigh<sup>1)</sup> aus den folgenden Formeln berechnen:

$$(3) \quad 1 + \delta = \frac{k f_z}{F} = \sqrt{1 + \frac{1}{3} \mu^2 \left( \frac{y^2 + z^2}{4} \right) \frac{k^2 n^2}{x^2}}$$

für rechteckigen Querschnitt mit den Seiten  $y$  und  $z$ ,

$$(4) \quad \frac{k f_z}{F} = \sqrt{1 + \frac{\mu^2 r^2 k^2 n^2}{2 x^2}}$$

für kreisförmigen Querschnitt vom Radius  $r$  und

$$(4a) \quad \frac{k f_z}{F} = \sqrt{1 + \frac{\mu^2 r^2 k^2 n^2}{x^2}}$$

für ein dünnwandiges Rohr vom mittleren Radius  $r$ .  $\mu$  ist das Verhältnis von Querkontraktion zu Längsdilatation (Poisson'sche Konstante). Man erhält diese Dickenkorrektur bekanntlich dadurch, daß man die kinetische Energie der Querbewegung, die durch die periodische Querkontraktion entsteht, zur kinetischen Energie der Längsbewegung hinzuaddiert, die bei der Ableitung der gewöhnlichen Formel (2) allein in Rechnung gesetzt wird. Der Vergleich der beiden Figg. 1a und 1b zeigt, daß die Rayleigh'sche Korrektur auch für isotrope Stäbe die Beobachtungen bei höheren Oberschwingungen nicht annähernd richtig wiedergibt, was bereits früher von Giebe und Scheibe bei Quarzstäben nachgewiesen war. Über Fig. 1c sprechen wir in § 15.

#### § 4. Grundlage einer neuen Theorie aus kopplungstheoretischen Vorstellungen

Bei der Aufstellung einer neuen Theorie der Longitudinalschwingungen von Stäben beliebiger Dicke sind wir von der folgenden Vorstellung ausgegangen, die sich bei den Untersuchungen von Giebe und Scheibe an Quarzstäben bereits bis zu einem gewissen Grade bewährt hatte: Mit den Dehnungsschwingungen in der Längsrichtung eines Stabes, den „axialen“ Schwingungen, sind vermöge der Querkontraktion Dehnungsschwingungen der Querschnitte „laterale“ Schwingungen gekoppelt. Mit abnehmender Stablänge bei gleichbleibendem Querschnitt oder mit abnehmender Länge der elastischen Wellen, also zunehmender Ordnungszahl  $k$ , der harmonischen Reihe der „ungestörten“ axialen Eigenschwingungen kommen die letzteren schließlich in Resonanz mit der lateralen Eigenschwingung des Querschnitts. Wenn dieser Grundgedanke richtig ist, so sollte sich unser Problem mit Hilfe der be-

1) Von Rayleigh ist nur die Dickenkorrektur für kreisförmigen Querschnitt angegeben (Theorie of Sound I, Kap. 7, § 157, 1877).



kannten Theorie gekoppelter resonierender Schwingungssysteme lösen lassen.

Besteht zwischen zwei Schwingungen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  eine Kopplung sowohl durch die potentielle wie die kinetische Energie (Kraft- und Beschleunigungskopplung), so lautet die Bestimmungsgleichung für die Frequenzen  $F$  eines solchen Systems von zwei Freiheitsgraden folgendermaßen:<sup>1)</sup>

$$(5) \quad \begin{vmatrix} b_{11} - a_{11} F^2 & b_{12} - a_{12} F^2 \\ b_{21} - a_{21} F^2 & b_{22} - a_{22} F^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dabei sind die Koeffizienten  $a, b$  durch die folgenden Gleichungen für die potentielle Energie  $V$  und die kinetische Energie  $T$  definiert:

$$(6) \quad \begin{cases} V = \frac{1}{2} [b_{11} \varphi_1^2 + 2b_{12} \varphi_1 \varphi_2 + b_{22} \varphi_2^2], \\ T = \frac{1}{2} [a_{11} \dot{\varphi}_1^2 + 2a_{12} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + a_{22} \dot{\varphi}_2^2]. \end{cases}$$

Die „ungestörten“ Eigenfrequenzen der beiden Schwingungen  $\varphi_1, \varphi_2$  sind

$$(7) \quad f_1 = \sqrt{\frac{b_{11}}{a_{11}}}, \quad f_2 = \sqrt{\frac{b_{22}}{a_{22}}}.$$

Die beiden Kopplungskoeffizienten  $p$  und  $q$  für die Kraft- bzw. Beschleunigungskopplung sind, wenn man beachtet, daß  $a_{12} = a_{21}$  und  $b_{12} = b_{21}$  ist,

$$(8) \quad p = \frac{b_{12}}{\sqrt{b_{11} b_{22}}}, \quad q = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11} a_{22}}}.$$

Durch Einführung von (7) und (8) in (5) erhält man

$$(9) \quad (f_1^2 - F^2)(f_2^2 - F^2) = (p f_1 f_2 - q F^2)^2.$$

Sind nicht nur zwei, sondern drei Schwingungen vorhanden, deren jede mit jeder anderen gekoppelt ist, so tritt an Stelle von (5) die Determinante

$$(10) \quad \begin{vmatrix} b_{11} - a_{11} F^2 & b_{12} - a_{12} F^2 & b_{13} - a_{13} F^2 \\ b_{21} - a_{21} F^2 & b_{22} - a_{22} F^2 & b_{23} - a_{23} F^2 \\ b_{31} - a_{31} F^2 & b_{32} - a_{32} F^2 & b_{33} - a_{33} F^2 \end{vmatrix} = 0,$$

von der wir später (in einfacherer Form) Gebrauch machen werden.

Bei der Anwendung der vorstehenden Beziehungen auf unser elastisches Problem behandeln wir nacheinander die drei Fälle des Rohrs, des zylindrischen und des rechteckigen Stabes.

1) M. Wien, *Ann. d. Phys.* 61. S. 151. 1897; *Handb. d. Phys.* Bd. 6. S. 335.



**Dehnungsschwingungen von Rohren****§ 5. Ableitung der Frequenzformel**

Ist die Wandstärke des Rohres sehr klein gegen seinen Durchmesser, was sich praktisch weitgehend realisieren läßt, so haben wir es mit einem nur zweidimensionalen Gebilde mit nur zwei begrenzenden Randlinien zu tun. Aus diesem und aus anderen Gründen, auf die wir noch zu sprechen kommen, ist unser Problem beim Rohr viel einfacher als beim massiven Stab von kreisförmigem oder rechteckigem Querschnitt zu behandeln. Wenn wir nun die Formel (9) anwenden wollen, so müssen wir uns zunächst darüber klar werden, welches die „ungestörten“ Eigenfrequenzen  $f_1, f_2$  der beiden Teilsysteme sind, aus denen wir uns nach § 4 das Rohr zusammengesetzt denken. Das Eigentümliche des elastischen Problems besteht darin, daß wir nicht in der Lage sind, die beiden Teilsysteme voneinander zu trennen und völlig zu entkoppeln, wie es z. B. bei gekoppelten elektrischen Schwingungskreisen meist leicht möglich ist, und die beiden Einzelfrequenzen  $f_1, f_2$  experimentell getrennt zu bestimmen. Wohl aber können wir die Abmessungen des Rohrs so wählen oder gewählt denken, daß die eine der Eigenfrequenzen  $f_1$  oder  $f_2$  sehr viel niedriger ist als die andere. Ist  $f_2 \gg f_1$ , so kann die wirkliche Frequenz  $F$ , die experimentell bestimmbar ist, nur unmerklich wenig von  $f_1$  abweichen. Dieser Fall liegt vor, wenn das Rohr sehr lang ist und sehr kleinen Durchmesser hat. Für die in Richtung der Rohrachse sich fortpflanzenden Schwingungen, die axialen Schwingungen, muß dann also die bekannte Formel (2) gelten. Der andere Extremfall  $f_1 \gg f_2$  tritt ein, wenn das Rohr eine im Verhältnis zum Durchmesser sehr kleine Länge hat, wenn es also zu einem in axialer und radialer Richtung dünnen Ring entartet. Für  $f_2$  haben wir demnach die Eigenfrequenzen der Dehnungsschwingungen eines Ringes einzusetzen. Aus unseren Überlegungen ergibt sich, daß man in den Grenzfällen jedes der beiden Teilsysteme, aus denen wir uns ein Rohr zusammengesetzt denken, als Ring bzw. als sehr langes Rohr verwirklichen kann.

Das Besondere unseres elastischen Problems besteht ferner darin, daß jedes unserer beiden Teilsysteme eine unendliche Reihe von Dehnungseigenschwingungen hat. Wir bezeichnen die Länge des Rohres mit  $x$ , den mittleren Radius mit  $r$ . Dann gilt für die Eigenfrequenzen der axialen Schwingungen die bekannte Formel

$$(11) \quad k f_x = \frac{k}{2x} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (k = 1, 2, 3 \dots)$$

und für die radialen Eigenfrequenzen  $f_r$  nach Love<sup>1)</sup>

$$(12) \quad f_r = \frac{1}{2\pi r} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \sqrt{1+n^2} \quad (n = 0, 1, 2 \dots).$$

Die Verhältnisse werden nun beim Rohr dadurch vereinfacht, daß nur die Schwingung  $f_r$  von der nullten Ordnung in Betracht kommt, bei welcher rings um den Umfang alle Radien in gleicher Phase periodisch kleiner und größer werden. Bei der Oberschwingung  $n = 1$  bilden sich auf dem Umfang zwei stehende elastische Halbwellen aus, so daß sich im gleichen Zeitmoment die eine Hälfte des Umfangs kontrahiert, die andere dilatiert. Eine solche Deformationsverteilung kann aus Symmetriegründen durch Kopplung mit den axialen Schwingungen nicht entstehen, wenn diese primär angeregt werden, denn die axialen Schwingungen erzeugen einen über den ganzen Rohrumfang gleichmäßigen Zug oder Druck. Das Entsprechende gilt für alle übrigen Oberschwingungen, weil sich immer eine gerade Anzahl von Halbwellen über den Umfang verteilt. Wir brauchen demnach nur mit einer einzigen Radialfrequenz

$$(13) \quad f_r = \frac{1}{2\pi r} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

zu rechnen, mit welcher jede der harmonischen axialen Schwingungen  $kf_z$  gekoppelt ist.

Es bleibt noch zu erörtern, welcher Art die von uns angenommene Kopplung zwischen den beiden Schwingungen  $kf_z$  und  $f_r$  ist. Mit Bestimmtheit kann man von vornherein nicht sagen, ob Kraft- oder Beschleunigungskopplung oder endlich, wie in § 4 angenommen, gemischte Kopplung vorliegt. Da aber die Tatsache, daß eine dehnende Kraft außer einer Längsdilatation auch eine Querkontraktion erzeugt, in der Definition des Elastizitätsmoduls  $E$  bereits berücksichtigt ist, so wird wahrscheinlich nur die Beschleunigungskopplung maßgebend sein. Auch in der Rayleighschen Formel wird ja, wohl aus dem gleichen Grunde, nur derjenige Beitrag in Ansatz gebracht, den die kinetische Energie der Querbewegung zur Gesamtenergie liefert. Die Entscheidung über die Kopplungsart mußten wir aus den Meßresultaten zu erbringen suchen. Da man durch Messung der Frequenzen  $F$  verschiedener Oberschwingungen höherer Ordnung eine mehr als ausreichende Anzahl von Bestimmungsgleichungen für die Kopplungskoeffizienten  $p$  und  $q$  gewinnen kann, so wäre diese Entscheidung

1) A. E. H. Love-A. Timpe, Lehrb. d. Elastizität 1907, S. 521.

verhältnismäßig einfach, wenn man die Koeffizienten bei gegebenem Querschnitt als unabhängig von der Ordnungszahl der Oberschwingungen, d. h. von der Stablänge annehmen darf. Diese Voraussetzung kann man aber kaum ohne weiteres machen. Nur eine Bedingung ist unbedingt vorgeschrieben. Die Frequenzgleichung muß so beschaffen sein, daß das Ähnlichkeitsgesetz erfüllt ist<sup>1)</sup>, d. h. wenn alle Lineardimensionen des Rohres in einem und demselben Verhältnis geändert werden, wobei also  $k f_z / f_r$  konstant bleibt, so muß auch  $F / k f_z$  bzw.  $F / f_r$  unverändert bleiben. Diese Bedingung ist, außer durch  $p = \text{const}$  und  $q = \text{const}$ , auch erfüllt, wenn  $p$  und  $q$  Funktionen des Verhältnisses von Radius zur Länge sind. Die Aufgabe wäre dann, aus den Versuchsergebnissen auch die Art dieser Funktionen zu ermitteln; dies ist selbst bei Annahme einfachster Funktionsformen kaum ohne empirische Konstanten möglich, obwohl wir bei unseren elastischen Systemen gegenüber sonst bekannten gekoppelten Systemen den großen Vorteil haben, daß wir die (ungestörte) Eigenfrequenz des einen Teilsystems in genau bekannter Weise, nämlich im Verhältnis der ganzen Zahlen 1:2:3 usw. ändern können.

Eine sichere Entscheidung über die Kopplungsart gelang uns erst, als wir unsere Untersuchungen, die sich anfangs nur auf rechteckige und zylindrische Stäbe erstreckten<sup>2)</sup>, auf Rohre

1) Die Gültigkeit dieses Gesetzes ist von Giebe und Scheibe, a. a. O., experimentell an Quarzstäben nachgewiesen.

2) Tatsächlich haben uns unsere Versuche (vgl. Tätigkeitsbericht der Phys. Techn. Reichsanstalt, Ztschr. f. Instrumentenkde 52. S. 167. 1932) mit rechteckigen Stäben (Länge  $x$ , Seiten  $y$ ,  $z$ ) zunächst zur Annahme einer gemischten Kopplung zwischen  $x$  und  $y$  sowie  $x$  und  $z$ , und von Kopplungskoeffizienten  $p$  und  $q$  geführt, die sich mit der Ordnungszahl  $k$  nach den einfachen Gesetzen

$$p_{xy} = a \frac{k f_z}{f_y}, \quad p_{xz} = a \frac{k f_z}{f_z}, \quad q_{xy} = q_{xz} = b k^3 f_z^3 \left( \frac{1}{f_y^3} + \frac{1}{f_z^3} \right)$$

ändern. Die daraus resultierende Formel enthielt nur zwei empirische Konstanten  $a$  und  $b$ , von denen sich  $a$  gleich dem Zahlenwert der Poissonschen Konstanten  $\mu$  ergab, und stellte die Messungen an Stäben beliebiger Seitenverhältnisse bis zur Resonanz  $k f_z = f_y$  gut dar. Diese Formel führt aber oberhalb der Resonanz zu theoretisch unwahrscheinlichen Beziehungen und die experimentelle Nachprüfung im Gebiet jenseits der Resonanz macht gewisse Schwierigkeiten, von denen in § 11 die Rede sein wird. Deshalb war die Entscheidung über die Kopplungsart zunächst schwierig. Giebe u. Scheibe (a. a. O.) haben nach ihren

Versuchen an rechteckigen Quarzstäben Kraftkopplung und zwar  $p = a \frac{k f_z}{f_y}$  für wahrscheinlich gehalten. Ihre Formel enthielt aber ebenfalls noch empirische Konstanten und galt nur bis zur Resonanz. Die Ursache für

ausdehnten. Bei diesen ließen sich die Schwingungen viel leichter als bei massiven Stäben anregen, wir konnten daher zahlreiche Eigenfrequenzen auch weit oberhalb des Resonanzfalls ( $k f_z = f_r$ ) sicher messen und ihre Ordnung noch eindeutig identifizieren, was für massive Stäbe wegen des Auftretens von Störschwingungen unbekannter Art bei höheren Frequenzen nicht in gleichem Maße der Fall ist (vgl. § 11). Die Versuche an Rohren lehrten nun, daß die Kopplung nur durch die kinetische Energie erfolgt, daß der Kopplungskoeffizient  $p$  also gleich Null und daß  $q$  konstant, d. h. unabhängig von der Ordnungszahl  $k$  bzw. der Rohrlänge ist. Nur die dieser Sachlage entsprechende Kopplungsformel gibt die Beobachtungen in dem ganzen Frequenzbereich richtig wieder.

Führen wir in die Formel (9) an Stelle von  $f_1$  und  $f_2$  die durch die Gl. (11) und (13) definierten Frequenzen  $k f_z$  und  $f_r$  ein und setzen  $p = 0$ , so erhalten wir

$$(14) \quad (k^2 f_z^2 - F^2) \cdot (f_r^2 - F^2) = q^2 F^4.$$

Diese einfache Formel stellt nun für Rohre, wie wir an Hand der Meßergebnisse zeigen werden, eine vollständige und strenge Lösung unseres Problems dar.

#### § 6. Diskussion der Frequenzformel. Zwei Frequenzserien. Tote Zone

Aus (14) erhält man für  $F^2$  die quadratische Gleichung:

$$(15) \quad F^4 - \frac{F^2 (k^2 f_z^2 + f_r^2)}{1 - q^2} + \frac{k^2 f_z^2 f_r^2}{1 - q^2} = 0$$

mit der Lösung

$$(16) \quad F^2 = \frac{k^2 f_z^2 + f_r^2 \mp \sqrt{(k^2 f_z^2 - f_r^2)^2 + 4 q^2 k^2 f_z^2 f_r^2}}{2(1 - q^2)}$$

und somit für jede Ordnung  $k$  zwei Frequenzen  $F$ , d. h. zwei Serien von Eigenfrequenzen. Die Eigenfrequenzen der Serie I (negatives Vorzeichen der Wurzel) sind sämtlich kleiner, diejenigen der Serie II (positives Vorzeichen) größer als  $f_r$ . Aus Gl. (15) ergibt sich unmittelbar für das Produkt bzw. die Summe der zum gleichen  $k$  gehörigen Eigenfrequenzen der beiden Serien:

$$(17) \quad F_I \cdot F_{II} = \frac{k f_z f_r}{\sqrt{1 - q^2}} \quad \text{oder} \quad \frac{F_I \cdot F_{II}}{k} = \text{const}$$

die Unsicherheit hinsichtlich der Kopplungsart beruht z. T. auch darauf, daß Kraftkopplung mit  $p = \mu \frac{k f_z}{f_r}$  und Beschleunigungskopplung mit  $q = \text{const} = \mu$  annähernd denselben Verlauf der Eigenfrequenzreihen bis zur Resonanz ergeben. Von entscheidender Bedeutung sind deshalb Messungen im Gebiet jenseits der Resonanz.

und

$$(18) \quad F_1^2 + F_{II}^2 = \frac{k^2 f_x^2 + f_r^2}{1 - q^2}$$

oder aus (18) nach Einführung von (17)

$$(19) \quad \frac{1}{F_1^2} + \frac{1}{F_{II}^2} = \frac{1}{k^2 f_x^2} + \frac{1}{f_r^2}.$$

Die beiden Formeln (17) und (19) gestatten, unsere Theorie in sehr einfacher Weise experimentell zu prüfen, wenn die zur gleichen Ordnung  $k$  gehörigen Frequenzen  $F_1$  und  $F_{II}$  beider Serien sicher beobachtbar sind.

Aus GL (14) ergeben sich folgende vier Grenzfälle, von denen wir die beiden ersten schon oben behandelt haben.

a) Für  $r \approx 0$ , d. h. für ein sehr dünnes Rohr wird  $f_r \approx \infty$  und  $F_1 = k f_x$ , man hat reine axiale Schwingungen.

b) Für  $x \approx 0$ , also für ein äußerst kurzes Rohr wird  $f_x \approx \infty$ , man erhält als höchste Grenzfrequenz der Serie I

$$(20) \quad F_1(\text{max}) = f_r,$$

d. h. die reine radiale Ringschwingung.

c) Für  $x = \infty$ , also längs eines unendlich langen Rohres, können sich stehende Wellen axialer Schwingungen nicht ausbilden,  $f_x$  wird gleich Null und man erhält als niedrigste Grenzfrequenz der Serie II

$$(21) \quad F_{II}(\text{min}) = \frac{f_r}{\sqrt{1 - q^2}},$$

die Eigenfrequenz der rein radialen Schwingung eines unendlich langen Rohres.

d) Für sehr großen Rohrdurchmesser  $r \approx \infty$  kann man  $f_r = 0$  setzen. Für die höchsten Eigenfrequenzen der Serie II wird dann

$$(22) \quad F_{II} = \frac{k f_x}{\sqrt{1 - q^2}}.$$

Diese sind also, ebenso wie die niedrigsten der Serie I harmonisch, aber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist jetzt größer, nämlich  $\sqrt{\frac{E}{\rho(1 - q^2)}}$  gegenüber  $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$  am Anfang der Serie I.

e) Von Interesse ist endlich noch der Fall der Resonanz zwischen axialen und radialen Schwingungen. Für  $k f_x = f_r$  sind die beiden Wurzeln von (14)

$$(23) \quad F_1(\text{Res.}) = \frac{f_r}{\sqrt{1 + q}} \quad \text{und} \quad F_{II}(\text{Res.}) = \frac{f_r}{\sqrt{1 - q}}.$$

Die Resonanz tritt ein, wie aus der Gleichsetzung von (11) und (13) folgt, wenn die elastische Halbwellenlänge  $x/k$  oder für  $k = 1$  die Rohrlänge  $x$  gleich dem halben Rohrumfang ist.

In einem gewissen Frequenzbereich zwischen beiden Serien, der sich aus (20) und (21) zu

$$(24) \quad F_{II}(\min) - F_I(\max) = f_r \left( \frac{1}{\sqrt{1 - q^2}} - 1 \right)$$

berechnet, ist eine „tote Zone“ vorhanden, deren Breite außer von  $q$  nur von  $f_r$ , nicht aber von  $f_a$ , abhängt, d. h. bei einem gegebenen Rohrradius können in dieser Zone Dehnungsschwingungen unter keinen Umständen auftreten, wie man auch Stablänge oder Ordnungszahl wählen mag.

Aus (20) und (21) ergibt sich ferner für den Kopplungskoeffizienten

$$(25) \quad q = \sqrt{1 - \frac{F_I^2(\max)}{F_{II}^2(\min)}},$$

d. h. man kann den Kopplungskoeffizienten aus den Grenzfrequenzen beider Serien berechnen, also aus der radialen Eigenfrequenz eines dünnen Ringes und derjenigen eines unendlich langen Rohres. Für die erste,  $F_I(\max) = f_r$ , gilt die schon mitgeteilte Formel (13), für die zweite ist ebenfalls eine Formel<sup>1)</sup> bekannt, sie lautet

$$(26) \quad F_{II}(\min) = \frac{1}{2\pi r} \sqrt{\frac{E}{\varrho(1 - \mu^2)}}.$$

Somit folgt aus (25):

$$(27) \quad q = \mu.$$

Der Kopplungskoeffizient zwischen den axialen und radialen Dehnungsschwingungen eines dünnen Rohres ist also einfach gleich der Poissonschen Konstanten  $\mu$ .

Für die Dehnungsschwingungen „dünner zylindrischer Schalen“ ist, wie wir erst nach Abschluß unserer Untersuchungen fanden, eine mit den gewöhnlichen mathematischen Hilfsmitteln der Elastizitätstheorie abgeleitete Frequenzgleichung bereits von Love angegeben.<sup>2)</sup> Sie lautet in unserer Buchstabenbezeichnung:

$$(28) \quad \omega^4 - \omega^2 \frac{E}{\varrho(1 - \mu^2)} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{k^2 \pi^2}{x^2} \right) + \frac{E^2 k^2 \pi^2}{\varrho^2 (1 - \mu^2) r^2 x^2} = 0$$

und ist völlig identisch mit unserer Rohrformel (15), wenn man

1) J. R. Airey, Arch. d. Mathem. u. Phys. [3] 20. S. 294. 1913.

2) A. E. H. Love u. A. Timpe, Lehrb. d. Elastizität, Leipzig u. Berlin 1907, S. 624.

in dieser für  $k f_z$  und  $f_r$  die Ausdrücke aus (11) bzw. (13), für  $q$  nach (27)  $\mu$  und für  $F = \frac{\omega}{2\pi}$  setzt.

Die Richtigkeit unserer Kopplungstheorie der Dehnungsschwingungen wird also durch diese auf gänzlich andere Weise abgeleitete Formel, die allerdings noch niemals experimentell nachgeprüft ist, wahrscheinlich gemacht. Der Vorzug des von uns angegebenen neuen Weges besteht einmal in der Einfachheit, vor allem aber geben die kopplungstheoretischen Vorstellungen unmittelbar ein anschauliches Bild von den physikalischen Vorgängen. Die aus anderen Gebieten der Physik wohlbekannten Erscheinungen gekoppelter Schwingungen lassen sich an Hand der einfachen Formel (14) unmittelbar voraussagen, auch der Zusammenhang zwischen den Formeln für Ring und unendlich langes Rohr wird verständlich. Die auf ihrer Herleitung beruhende komplizierte Schreibweise der Formel (28) gestattet dagegen die Beziehungen zwischen den Eigenfrequenzen der verschiedenen Ordnungen und die physikalische Ursache für das Auftreten zweier Frequenzserien wohl kaum zu übersehen.

Zur Berechnung der tieferen Eigenfrequenzen der Serie I können wir eine mit der Rayleighschen vergleichbare Näherungsformel ableiten, die so lange gilt, als die radiale Eigenfrequenz  $f_r$  noch merklich größer als  $k f_z$  ist. Wir schreiben die Formel (14) in der Form

$$(29) \quad \frac{k f_z}{F} = \sqrt{1 + \frac{q^2}{\frac{f_r^2}{F^2} - 1}},$$

setzen im Nenner des Korrektionsgliedes auf der rechten Seite für  $F$  den Näherungswert  $k f_z = k \sqrt{\frac{E}{\rho}} : 2x$ , für  $q$  nach (27)  $\mu$  und für  $f_r$  den Wert nach (13) und erhalten

$$(30) \quad \frac{k f_z}{F} = \sqrt{1 + \frac{\mu^2 r^2 k^2 \pi^2}{x^2 \left(1 - \frac{r^2 k^2 \pi^2}{x^2}\right)}}.$$

Diese Näherungsformel stimmt bis auf den Faktor  $\left(1 - \frac{r^2 k^2 \pi^2}{x^2}\right)$  von  $x^2$  mit der Rayleighschen Formel (4a) überein. Dieser Faktor ist in unserer kopplungstheoretischen Vorstellung ein Maß für die Verstimmung der beiden gekoppelten Systeme, die für  $x = r k \pi$  in Resonanz sind. Die Näherungsformel (30) ist jedoch nur bei starker Verstimmung anwendbar, weil mit zunehmender Annäherung an die Resonanz die eingeführte



Näherung  $F = k f_z$  immer weniger zulässig ist, sie ergibt für Verhältnisse  $u = r k \pi : x$  bis zu 0,5 (entsprechend einem Rohr, dessen Länge gleich dem Umfang ist) innerhalb 1 ‰ richtige Resultate für  $F$ . Bei einem Nickelrohr ( $\mu = 0,29$ ) von beispielsweise 100 mm Länge, 8,15 mm Durchmesser und 0,3 mm Wandstärke berechnen sich für die 4. bzw. 5. Oberschwingung ( $u = 0,51$  bzw. 0,64) die Harmonieabweichungen  $\delta = \frac{k f_z}{F} - 1$  nach Formel (30) zu 1,49 bzw. 2,88 ‰, nach Rayleighs Formel zu 1,10 bzw. 1,17 ‰, nach der genauen Formel zu 1,42 bzw. 2,64 ‰. Oberhalb  $u = 0,64$  liefert die Formel (30) in schnell ansteigenden Maße viel zu große Werte von  $\delta$ .

### § 7. Das beobachtete Frequenzspektrum bei Nickelrohren

Die Untersuchungen wurden an 5 Rohren *a* bis *e* ausgeführt, die aus technisch reinem Nickel nahtlos gezogen sind und verschiedene Wandstärke, sowie z. T. verschiedenen Außendurchmesser haben. Die Rohre *a* bis *d* sind von ein- und demselben langen Rohr abgeschnitten, das einen Außendurchmesser von 10 mm hatte, während Rohr *e* von anderer Herkunft war (Deutsche Nickelwerke in Schwerte). Die Rohre wurden auf den gewünschten Außendurchmesser abgedreht und z. T. auch innen durch Schleifen von Unebenheiten befreit. Die Abmessungen sind in Tab. 1 angegeben. Bei den Rohren *b* bis *d* sind alle beobachtbaren Schwingungen bis zum etwa 30fachen Betrag (750 kHz) der axialen Grundfrequenz gemessen, Rohr *a* wurde zu einem besonderen Zweck, nämlich zur sicheren Feststellung der Ordnungszahl gewisser Schwingungen benutzt.

Die Meßergebnisse sind in den mit  $F'$  bzw.  $F''$  überschriebenen Spalten der Tab. 2 angegeben, Spalte 1 enthält

Tabelle 1

Meßergebnisse für Nickelrohre

(x = Länge,  $2r_a$  = Außendurchmesser,  $r_a - r_i$  = Wandstärke, Dichte  $\rho = 8,85$ )

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nr.	Abmessungen in mm			$F_1$ in kHz	$f_z$ in kHz	$s$ in ‰	$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ in m/sec	$E$ in $10^{11}$ Dyn/cm <sup>2</sup>	$f$ . exp. in kHz	$f$ . ber. in kHz	$q = \mu$
	x	$2r_a$	$r_a - r_i$								
<i>b</i>	100,1	8,6	0,3	24,79	24,58	-0,9	4921	21,43	188,7	188,4	0,297
<i>c</i>	100,1	8,3	0,15	24,26	23,92	-1,4	4789	20,30	186,7	186,7	0,290
<i>d</i>	100	8,7	0,4	24,29	24,31	+0,1	4862	20,92	186,5	186,5	0,294
<i>e</i>	100	10	0,5	25,00	24,93	-0,3	4986	22,00	165,3	167,5	0,290



die Ordnungszahlen  $k$ , Spalte 2 die Reihe der harmonischen Schwingungen  $k f_x$  für Rohr  $b$ . Eine anschauliche Übersicht über die Frequenz und Lage der Eigenschwingungen geben die Figg. 2 und 3, in welchen die Eigenfrequenzen in Kurvenform über den Ordnungszahlen  $k$  (Fig. 2) bzw. nach Art eines Spektrums (Fig. 3) dargestellt sind. Zunächst sind ein paar Worte über die Feststellung der Ordnungszahlen der Eigenfrequenzen und ihre Zuordnung zu den beiden Serien zu sagen. Bei den niedrigsten Eigenfrequenzen der Serie I machte dies keinerlei Schwierigkeiten, da diese sehr nahe dem wohlbekannten Gesetz gehorchen. Für diejenigen der Serie II wurden durch Verschieben der Anregungs- oder Indikaterspule oder beider längs des Stabes diejenigen Stellungen ermittelt, bei denen die Amplitude der Stabschwingungen Höchstwerte erreichte. Auf diese Weise ließ sich die Lage der Deformationsmaxima und -minima und somit die Ordnungszahl ganz sicher feststellen. Sind erst einmal die niedrigsten Ordnungen bekannt, so ist die Bestimmung der höheren bei Serie II einfach, man braucht nur die Eigenfrequenzen, die bei allmählicher und stetiger Frequenzsteigerung der anregenden elektrischen Schwingungen zur Beobachtung gelangen, fortlaufend zu numerieren. Bei ungünstiger Stellung der Anregungs- oder Indikaterspule kann es wohl einmal vorkommen, daß eine Eigenfrequenz wegen zu kleiner Amplitude der Beobachtung entgeht, und demnach die nächstfolgende falsch numeriert wird. Ein Sprung in dem sonst stetigen Verlauf der Kurven Fig. 2 würde das unmittelbar erkennen lassen.

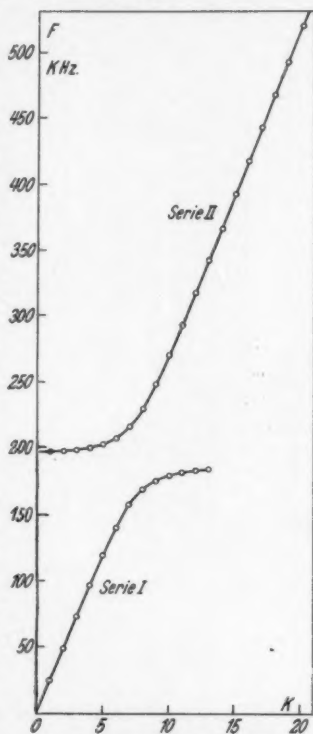


Fig. 2. Beobachtete Eigenfrequenzen  $F$  als Funktion der Ordnungszahl  $k$  für Nickelrohr  $b$

Beobachtete Eigenfrequenzen  $F$  von Nickelrohren in Kilohertz und ihre

$k$	$k f_n$ in kHz	$b: 100 \times 8,6 \times 8,0$				$c: 100 \times 8,3 \times 8,0$			
		$F_I$	$\Delta_I$	$F_{II}$	$\Delta_{II}$	$F_I$	$\Delta_I$	$F_{II}$	$\Delta_{II}$
		in kHz	in ‰	in kHz	in ‰	in kHz	in ‰	in kHz	in ‰
1	24,58	24,79	+9	197,8	0	24,26	+15	196,2	+5
2	49,15	49,16	+3	198,3	0	47,33	-8	196,8	+6
3	73,73	73,02	-2	199,1	0	70,34	-13	197,4	+5
4	98,30	96,76	0	200,8	+1	94,26	-1	198,4	+3
5	122,9	119,4	0	202,9	-2	116,5	0	200,5	+1
6	147,5	140,1	0	207,8	-1	137,2	+1	204,7	+1
7	172,0	157,3	+1	216,2	-1	154,5	+2	212,5	+3
8	196,6	169,3	+2	230,0	0	166,8	+3	225,9	+6
9	221,2	175,9	0	248,9	+1	173,9	+1	243,1	+5
10	245,8	179,5	-2	270,3	+1	177,5	-1	263,0	+2
11	270,3	182,1	0	293,2	0	179,5	-4	285,5	+2
12	294,9	183,8	+1	317,6	+1	181,3	-2	308,3	0
13	319,5	184,9	+1	342,5	+2	182,4	-2	331,7	-1
14	344,1	—	—	366,8	0	—	—	357,1	+3
15	368,6	—	—	392,1	+1	—	—	381,2	+2
16	393,2	—	—	417,3	+1	—	—	404,7	-1
17	417,8	—	—	442,9	+1	—	—	428,7	-2
18	442,4	—	—	467,8	0	—	—	454,9	+1
19	466,9	—	—	493,1	-2	—	—	476,7	-4
20	491,5	—	—	519,5	+2	—	—	503,4	0
21	516,1	—	—	544,7	+1	—	—	529,9	+3
22	540,7	—	—	570,7	+2	—	—	554,1	+2
23	565,2	—	—	595,1	0	—	—	577,8	0
24	589,8	—	—	621,5	+1	—	—	604,3	+3
25	614,1	—	—	646,8	+1	—	—	628,1	+1
26	639,0	—	—	672,7	+1	—	—	653,8	+2
27	663,6	—	—	698,2	+1	—	—	676,6	-1
28	688,1	—	—	724,0	+1	—	—	—	—
29	712,7	—	—	749,7	+1	—	—	—	—
30	—	—	—	—	—	—	—	—	—
31	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Nur bei den höchsten Ordnungen der Serie I, die in sehr kleinen Frequenzabständen aufeinanderfolgen, nur kleine Amplitude haben und auch durch Variation der Anregungsbedingungen nicht mehr gut identifizierbar sind, haben wir es bei einem Rohr  $a$  für nötig gehalten, die Richtigkeit der Ordnungszahlen  $k$  noch besonders dadurch zu überprüfen, daß wir die Rohrlänge allmählich in kleinen Schritten von 100 bis auf 53 mm verkürzten und jedesmal die Frequenz einiger Oberschwingungen maßen. Die den Verkürzungen entsprechenden Frequenzänderungen der einzelnen Schwingungen ermöglichen

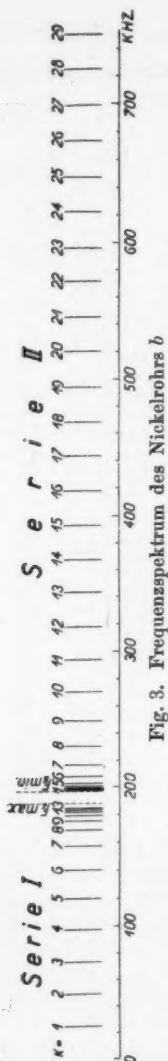
Tabelle 2

und ihre Abweichungen  $\Delta$  gegen die berechneten in Promille  $\left( \Delta = \frac{F_{\text{beob.}} - F_{\text{ber.}}}{F_{\text{ber.}}} \right)$

8,0		d: 100×8,7×7,9				e: 100×10×9			
$F_I$ in kHz	$\Delta_I$ in ‰	$F_I$ in kHz	$\Delta_I$ in ‰	$F_{II}$ in kHz	$\Delta_{II}$ in ‰	$F_I$ in kHz	$\Delta_I$ in ‰	$F_{II}$ in kHz	$\Delta_{II}$ in ‰
24,29	0	194,5	-4	25,00	+4	173,0	+1		
48,52	+1	195,2	-3	49,76	+2	173,5	+1		
72,28	-1	196,2	-2	74,12	+2	174,3	-1		
95,80	0	197,9	-1	97,63	+1	176,6	0		
118,3	+1	200,5	-1	119,3	0	180,2	-1		
138,6	-1	205,1	-1	137,2	-1	188,5	+2		
155,3	-1	213,3	-1	148,9	-2	202,6	+3		
166,8	-2	227,4	+2	155,3	-1	222,1	+2		
173,2	-5	246,3	+4	158,5	-1	245,1	+4		
179,5	+9	267,5	+3	160,5	-1	268,7	+2		
181,3	+6	290,3	+2	161,5	-1	293,5	+2		
182,9	+7	314,8	+4	162,4	0	318,7	+2		
—	—	338,3	+2	163,1	0	344,0	+2		
—	—	362,8	+1	—	—	369,7	+2		
—	—	387,8	+4	—	—	395,5	+2		
—	—	412,7	+2	—	—	420,8	+1		
—	—	437,7	+2	—	—	446,7	+1		
—	—	462,2	0	—	—	472,3	+1		
—	—	487,5	+1	—	—	498,3	+1		
—	—	513,1	+1	—	—	523,7	0		
—	—	537,5	0	—	—	549,4	0		
—	—	563,2	+1	—	—	575,4	0		
—	—	587,9	0	—	—	600,7	-1		
—	—	613,0	-1	—	—	625,9	-2		
—	—	637,0	-3	—	—	652,6	-1		
—	—	—	—	—	—	679,2	0		
—	—	—	—	—	—	704,0	-2		
—	—	—	—	—	—	730,4	-1		
—	—	—	—	—	—	755,6	-2		
—	—	—	—	—	—	780,2	-4		
—	—	—	—	—	—	809,1	-3		

ein recht sicheres Urteil über die Ordnungszahlen. Endlich ist noch zu betonen, daß wir außer den in Tab. 2 und in den Fig. 2 und 3 eingetragenen keine weiteren Eigenfrequenzen beobachten konnten, mit einer einzigen Ausnahme, die Rohr  $d$  betrifft. Hier wurde zwischen  $k=9$  und  $k=10$  eine ziemlich kräftige Schwingung bei 177,3 kHz von unbekanntem Typ gefunden, die anscheinend auch die Lage der nächsthöheren Eigenfrequenzen störend beeinflußt hat.

Der Beobachtung wird bei den höchsten Schwingungen beider Serien durch die schließlich verschwindend kleine

Fig. 3. Frequenzspektrum des Nickelrohres *b*

Amplitude eine Grenze gesetzt. Auch bei den niedrigsten Schwingungen der Serie II sind die Amplituden sehr klein, da für diese überwiegend radialen Schwingungen die Art und Weise der magnetostriktiven Anregung, die axiale Deformationen erzeugt, ungünstig ist. Jedoch ist selbst die Grundschiwingung der Serie II noch sicher meßbar.

Die Figg. 2 und 3 zeigen, daß die wesentlichsten Eigenschaften der Frequenzserien, die wir im vorigen Paragraphen aus der Theorie abgeleitet haben, durch die Messungen bestätigt werden, insbesondere das Auftreten zweier Serien gleicher Ordnungszahlen. Die nahezu harmonische Folge der Eigenfrequenzen am Anfang von Serie I und am Ende von II ist aus dem gleichen Abstand der Linien an den beiden Enden von Fig. 3 bzw. aus der Geradlinigkeit des unteren bzw. oberen Teils der Kurven Fig. 2 ersichtlich. Die Serie I nähert sich, wie die Theorie es verlangt, mit zunehmender Ordnungszahl  $k$  asymptotisch einem Grenzwert, ebenso Serie II mit abnehmendem  $k$ . Wie die schon erwähnten Versuche mit verschiedenen Längen des Rohres  $a$  lehrten, sind diese Grenzwerte unabhängig von der Rohrlänge. Auch die von der Theorie geforderte „tote Zone“ zwischen beiden Serien wurde durch die Messungen bestätigt. Bei keiner Länge des Rohres  $a$  zwischen 53 und 100 mm wurden in dieser Zone Eigenschwingungen beobachtet. Resonanz zwischen radialer und axialer Schwingung tritt z. B. für Stab  $b$  bei einer Frequenz ein, die zwischen den Ordnungen  $k = 7$  und  $8$  der ungestörten Axialschwingungen  $k f_z$  liegt. Da die Frequenzdifferenzen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Eigenschwingungen am Ende bzw. am Anfang von Serie I bzw. II immer kleiner wird, tritt beiderseits der toten Zone in jeder der beiden Serien eine Art Bandenspektrum mit Bandenkopf auf. Der theoretische Grenzwert  $F_{II}(\text{min})$  wird von der Grundschiwingung

$k = 1$  der Serie II nahezu erreicht, d. h. für diese Radialschwingung ist das Rohr schon fast als unendlich lang anzusehen, mit gleicher Annäherung, wie es für die axiale Schwingung  $k = 1$  der Serie I als unendlich dünn zu betrachten ist. Die höchste beobachtete Frequenz der Serie I ( $k = 13$ ) liegt noch merklich unterhalb des theoretischen Wertes  $F_1(\max)$ , der erst für  $k = \infty$  erreicht werden kann. In dem schmalen Frequenzintervall zwischen  $F_1(k = 13)$  und  $F_1(\max)$  liegt theoretisch eine unendlich große Anzahl von Eigenschwingungen, die aber praktisch nicht anregbar waren.

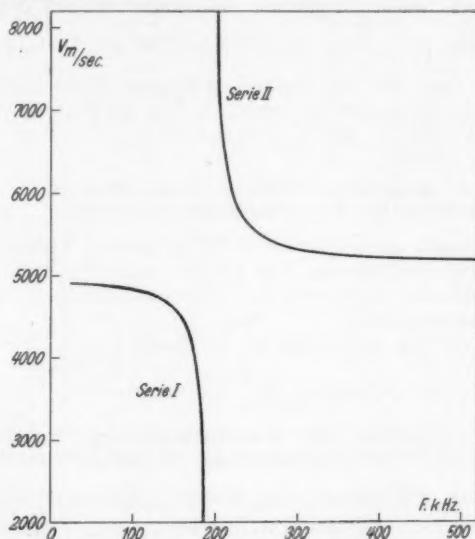


Fig. 4. Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v$  bei den Eigenfrequenzen  $F$  von Nickelrohr  $b$

Da die Frequenzen  $F$  einem endlichen Grenzwert zustreben, so werden die Verhältnisse  $k f_x$  zu  $F$ , also auch die Harmonieabweichungen  $\delta$  [Gl. (1)] mit zunehmender Ordnung  $k$  immer größer, sie wachsen unbegrenzt bis zu unendlich hohen Werten.

Man kann die erörterten Erscheinungen auch als Frequenzabhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v$  longitudinaler Wellen im Ultraschallgebiet deuten.<sup>1)</sup> Aus den beobachteten

1) Auf diese Art werden die Ergebnisse der in Fußnote 2 § 1 genannten neueren Arbeiten ausgedrückt.

Frequenzen  $F$  berechnet sich  $v$ , durch Multiplikation mit der elastischen Wellenlänge  $2\pi/k$ . Für das Nickelrohr  $b$  erhält man die in Fig. 4 dargestellte Änderung von  $v$  mit der Frequenz.  $v$  nimmt vom Werte  $\sqrt{\frac{E}{\rho}} = 4925$  m/sec (bei  $k = 1$  in Serie I) mit wachsender Frequenz zunächst langsam, dann immer schneller ab, und zwar bis auf Null an der unteren Grenze der toten Zone und bleibt im Bereich der letzteren Null. Kurz oberhalb dieser Zone hat  $v$  außerordentlich hohe Werte (39550 m/sec bei  $k = 1$  der Serie II), die zunächst sehr schnell, dann immer langsamer abnehmen bis auf den konstanten Betrag  $\sqrt{\frac{E}{\rho(1-\mu^2)}} \approx 5170$  m/sec bei den höchsten Ordnungen von Serie II. Im Bereich der toten Zone haben wir also ein Gebiet anomaler Dispersion, in dem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einen Sprung erleidet.

#### § 8. Quantitative Prüfung unserer Theorie, Bestimmung des Kopplungskoeffizienten $q$

Zur genauen quantitativen Prüfung unserer Theorie, insbesondere zur Bestimmung des Kopplungskoeffizienten  $q$  aus den Meßresultaten haben wir die folgenden beiden Verfahren a) und b) angewendet:

a) Die Gl. (14) kann man in der Form

$$(31) \quad F^2 = - \frac{q^2 F^4}{k^2 f_x^2 - F^2} + f_r^2$$

schreiben. Trägt man also die Quadrate der beobachteten Eigenfrequenzen  $F$  als Ordinaten über den zugehörigen Werten  $\frac{F^4}{k^2 f_x^2 - F^2}$  als Abszissen auf, so müssen, wenn unsere Theorie richtig ist, und unter der Voraussetzung, daß  $q$  eine von  $k$  unabhängige Konstante ist, alle Punkte auf einer geraden Linie liegen. Für diese Rechnung muß man  $f_x$  kennen, d. h. die Grundfrequenz des Rohres, wenn es einen im Verhältnis zu seiner Länge sehr kleinen Radius hätte. Bei unseren Rohren ( $x = 10$ ,  $2r \approx 1$  cm) ist die Bedingung in erster Annäherung erfüllt, der Einfluß der radialen auf die axialen Schwingungen kann also bei der Grundfrequenz nur gering sein; er macht tatsächlich nur 0,7% aus. Trotzdem kann man in den meisten Fällen  $f_x$  nicht einfach der beobachteten Grundfrequenz gleichsetzen, und zwar aus folgendem Grunde: Bei den Ordnungen  $k = 1$ , 2 und z. T. auch 3 ergeben die Messungen in vielen Fällen unregelmäßige Abweichungen vom

Harmoniegesetz, deren Ursache sicher nicht prinzipieller, sondern zufälliger Natur ist, weil sie bei verschiedenen Röhren sehr verschieden sind. Solche Unregelmäßigkeiten sind z. B. für Stab *b* aus der Fig. 5 ersichtlich, in welcher über den Ordnungszahlen *k* die beobachteten Harmonieabweichungen

$$(32) \quad \Delta = \frac{k F_1 - F}{F}$$

eingetragen sind, wo  $F_1$  bzw.  $F$  die gemessenen Frequenzen der Grundschiwingung bzw. der Oberschwingungen der Serie I

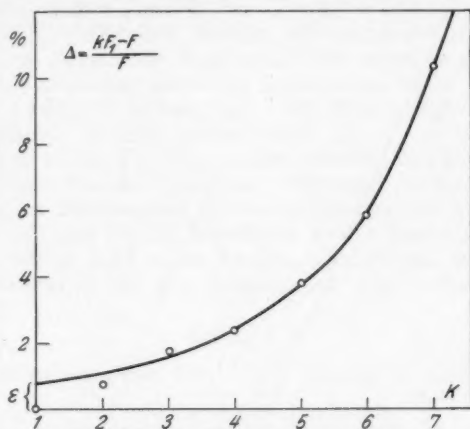


Fig. 5. Bestimmung der Korrektur  $\varepsilon$  aus der Kurve der Harmonieabweichungen  $\Delta$  für Rohr *b*

bedeuten. Die durch die Meßpunkte für  $k = 4$  bis 7 gelegte Kurve ergibt, wenn man in regelmäßiger und stetiger Weise extrapoliert, bei  $k = 1$  nicht Null für  $\Delta$ , sondern einen um den Betrag  $\varepsilon$  von rund 1% höheren Wert. Auch die Meßpunkte für  $k = 2$  und 3 liegen nicht auf dem Kurvenzug. Wir führen diese Unregelmäßigkeiten auf Inhomogenitäten des Materials zurück, die bei höheren Oberschwingungen, wo Mittelwerte des  $E$ -Moduls über eine Mehrzahl elastischer Halbwellen maßgebend sind, nicht mehr merkbar sind. Für die Berechnung nach (31) ist demnach

$$(33) \quad f_n = F_1 (1 + \varepsilon)$$

zu setzen. Die Beträge von  $\varepsilon$  sind für die verschiedenen untersuchten Röhre in Tab. 1, Spalte 7 angegeben, sie sind



bei der geringsten Wandstärke am größten.<sup>1)</sup> Diese Korrektur fällt nur bei niedrigsten Ordnungen der Serie I ins Gewicht, bei höheren Ordnungen und für Serie II, d. h. wenn die Differenz  $k^2 f_x^2 - F^2$  groß ist, spielt sie nur eine geringe Rolle.

Die graphische Darstellung nach (31) [unter Berücksichtigung von (33)] zeigt Fig. 6, und zwar rechts für Serie I,

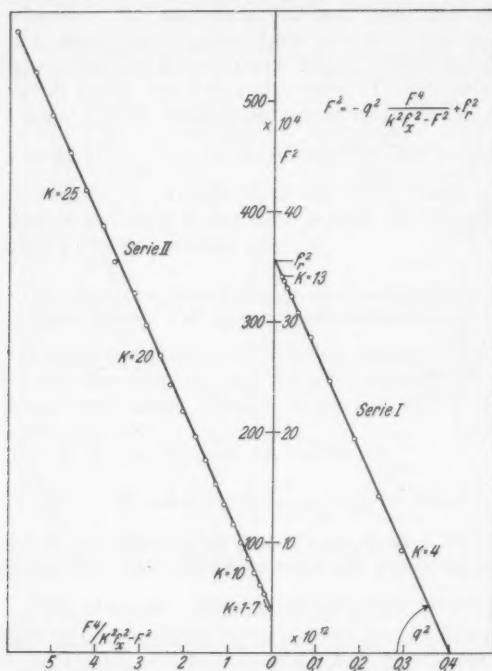


Fig. 6. Graphische Bestimmung des Kopplungskoeffizienten  $q$  und der radialen Eigenfrequenz  $f_r$  für Rohr  $b$

links in 10 fach kleinerem Ordinaten- und Abszissenmaßstab für Serie II. Wie man sieht, liegen alle Punkte in jeder der beiden Serien recht gut auf einer geraden Linie. Nur für  $k = 1$  bis 3 in Serie I stimmt dies aus den angeführten

1) Von E. Giebe u. A. Scheibe (a. a. O.) sind auch bei rechteckigen Quarzstäben ähnliche Unregelmäßigkeiten beobachtet. Bei sehr dünnen Stäben war die  $s$ -Korrektur am größten.

Gründen nicht, diese Oberschwingungen sind daher gar nicht eingezeichnet. Die beiden Geraden sind parallel, ihre Neigung gegen die Abszissenachse ist  $-q^2$ , der Kopplungskoeffizient ist also konstant und in beiden Serien der gleiche. Außer  $q^2$  erhält man auch  $f_r^2$ , und zwar als diejenige Strecke, welche die Gerade auf der Ordinatenachse abschneidet. Ganz ähnliche Resultate ergaben auch die Messungen an den übrigen untersuchten Rohren. Ist die Korrektur  $\epsilon$  durch Extrapolation nach Fig. 5, der eine gewisse Willkür anhaftet, nicht genau genug bestimmt, so liegen in der Darstellung nach Fig. 6 die Meßpunkte in dem Bereich von  $k=4$  bis etwa  $k=7$  nicht genau auf einer Geraden, sondern auf einer leicht gekrümmten Kurve. Die Krümmung kann man dann, wenn es darauf ankommt,  $q^2$  möglichst genau zu bestimmen, leicht zum Verschwinden bringen, indem man  $\epsilon$  ein klein wenig, meist nur einige Zehntel Promille, anders wählt.

b) Das zweite Verfahren macht von den Beziehungen (17) und (19) der Theorie Gebrauch. Während nach dem Verfahren a) zur Bestimmung von  $q$  die Messung der Serie I ausreichend ist, sind für b) Messungen beider Serien notwendig, was, wie wir in § 11 sehen werden, nicht immer möglich ist. Das Verfahren b) hat den Vorzug, daß man außer  $q$  und  $f$ ,

Tabelle 3

Prüfung der Formel (17):  $\frac{F_I \cdot F_{II}}{k} = \text{const} = \frac{f_x f_y}{\sqrt{1-q^2}}$   
( $\Delta$  = Abweichungen vom Mittel)

$k$	Rohr b: 100 · 8, 6 · 8,0		Rohr e: 100 · 10 · 9	
	$F_I \cdot F_{II}/k$ · 10 <sup>6</sup>	$\Delta$ ‰	$F_I \cdot F_{II}/k$ · 10 <sup>6</sup>	$\Delta$ ‰
1	4902	+ 8	4325	+ 3
2	4873	+ 2	4317	+ 1
3	4846	- 3	4306	- 1
4	4858	- 1	4310	0
5	4845	- 4	4301	- 3
6	4852	- 2	4309	- 1
7	4860	0	4310	0
8	4865	+ 1	4311	0
9	4864	0	4316	+ 1
10	4851	- 2	4312	0
11	4855	- 1	4310	- 1
12	4864	0	4313	0
13	4870	+ 2	4317	+ 1
Mittel: 4862			4312	

auch  $f_z$  unmittelbar, also ohne vorherige Bestimmung der Korrektur  $\varepsilon$  ermitteln kann. Sind  $F_I$  und  $F_{II}$  die für die gleiche Ordnungszahl  $k$  in beiden Serien beobachteten Frequenzen, so muß nach (19)  $\frac{1}{F_I^2} + \frac{1}{F_{II}^2}$  eine lineare Funktion von  $1/k^2$  sein. Wie die graphische Darstellung Fig. 7 für Rohr  $b$  zeigt, ist dies bis herab zu  $k = 4$  in ausgezeichneter

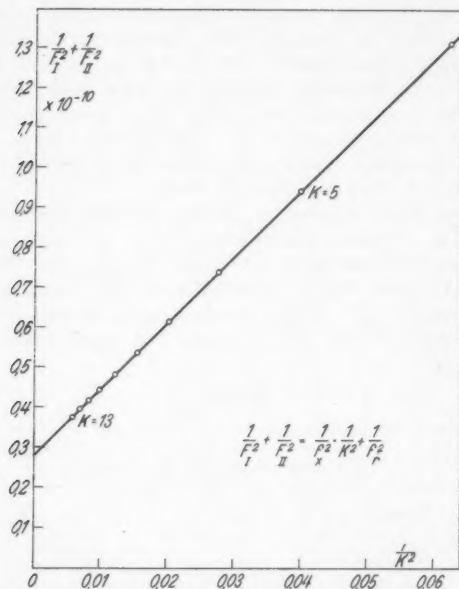


Fig. 7. Bestimmung von  $f_z$  aus der Neigung der Geraden  $(1/f_z^2)$  und von  $f_r$  aus dem Ordinatenabschnitt der Geraden  $(1/f_r^2)$  nach Gl. (19)

Weise der Fall. Die Neigung der Geraden gegen die Abszissenachse ergibt  $1/f_x^2$ , der Ordinatenabschnitt  $1/f_r^2$ . Das Produkt  $F_I \cdot F_{II}$  der beobachteten Eigenfrequenzen dividiert durch  $k$  hat, was aus der Zusammenstellung Tab. 3 für 2 Rohre zu ersehen ist, in dem der Messung zugänglichen Bereich (bei der höchsten meßbaren Ordnung in Serie I ist  $k = 13$ ) einen gut konstanten Wert, wie es die Formel (17) unserer Theorie fordert. Die Abweichungen  $\Delta$  vom Mittelwert entsprechen,

außer bei  $k = 1$ , im wesentlichen der Frequenzmeßgenauigkeit. Aus dem Mittelwert der Konstanten errechnet sich nach (17) mit den aus Fig. 7 ermittelten Werten von  $f_z$  und  $f_r$  der Kopplungskoeffizient  $q$ .

Die Resultate aller Rechnungen enthält Tab. 1 für die 4 Rohre  $b$  bis  $e$ . Aus  $f_z$  Spalte 6 und der Rohrlänge  $x$  ergibt sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v = \sqrt{E/\rho}$  und mit  $\rho = 8,85$  der Modul  $E$  (Spalte 9). Die  $E$ -Werte sind für die 3 Teile  $b$ ,  $c$ ,  $d$  eines und desselben langen Rohres etwas verschieden, bis zu 2,5%. Das Material ist also nicht ganz homogen, was wir schon aus der Notwendigkeit der  $\epsilon$ -Korrekturen geschlossen hatten. Aus mittlerem Radius und aus  $v$  berechnen sich nach der Ringformel (13) die radialen Eigenfrequenzen  $f_r$  (ber.) (Spalte 11), die mit den nach dem beschriebenen Verfahren experimentell bestimmten Werten  $f_r$  (exp.) für die Rohre  $b$ ,  $c$ ,  $d$  recht gut übereinstimmen. Die Differenz von 1,3% zwischen den beiden  $f_r$ -Werten bei Rohr  $e$  kann durch eine Unsicherheit in der Messung der Wandstärke bedingt sein, die man nur an den Rohrenden bestimmen kann. Die Ringformel<sup>1)</sup> wird also durch die Versuche bestätigt. Für die Kopplungskoeffizienten  $q$  (Spalte 12) endlich findet man den Mittelwert 0,293 mit Schwankungen von  $\pm 1\%$  bei verschiedenen Rohren. Dies ist in der Tat die für Nickel bekannte Größe der Poissonschen Konstanten  $\mu$ .<sup>2)</sup> Berechnet man rückwärts mit Hilfe der in Tab. 1 angegebenen Werte von  $f_z$ ,  $f_r$  und  $q$  für die 4 Rohre nach Formel (16) die Frequenzen  $F_1$  und  $F_{11}$ , so geben ihre Differenzen gegen die entsprechenden beobachteten Frequenzen ein zahlenmäßiges Urteil über die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment. Diese Differenzen, die unter  $\Delta$  in Tab. 2 mitgeteilt sind, betragen in den meisten Fällen nur 1–2‰; nur in wenigen Fällen kommen größere Abweichungen vor, so bei den niedrigsten Eigenfrequenzen der Serie I von Rohr  $b$  und  $c$  aus den genannten Ursachen, ferner bei  $k = 9$  bis 13 in Serie I von Rohr  $d$ , wohl infolge des Auftretens einer Störschwingung. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment ist also in dem ganzen großen Frequenzbereich ausgezeichnet bis zur höchsten gemessenen Oberschwingung  $k = 31$  in Serie II

1) Die Gültigkeit der Ringformel ist bereits von E. Giebe u. A. Scheibe durch Messungen an Quarzringen erwiesen, Zs. f. Instrkde. 47. S. 278. 1927.

2) Vgl. Landolt-Börnstein (5. Aufl.), Bd. I. S. 81,  $\mu = 0,30$ . E. Grüneisen gibt Ann. d. Phys. (4), 25. S. 825. 1908 den Wert 0,31 für  $\mu$  an.

bei Rohr  $e$ , wo die elastische Halbwellenlänge nur noch rund  $\frac{1}{3}$  des Rohrdurchmessers beträgt.

Die Dicke der Rohrwand, die nach Tab. 1 zwischen 0,15 und 0,5 mm variiert wurde, ist in dem untersuchten Frequenzbereich offenbar ohne Einfluß. Dies ist aus unserer Vorstellung heraus leicht verständlich, weil die Frequenz der Dickenschwingung noch mehr als 6 mal höher liegt als die der höchsten gemessenen Oberschwingung  $k = 30$ .

### § 9. Beobachtungen an einem Quarzrohr

Nach § 8 können wir mit Hilfe unserer Formeln (17) und (19) sowohl die axiale ( $f_z$ ) wie die radiale Grundfrequenz ( $f_r$ ) bestimmen, wenn mehrere Eigenfrequenzen gleicher Ordnung in beiden Serien gemessen sind. Dies Verfahren sollte auch dann noch anwendbar bleiben, wenn der Elastizitätsmodul für Dehnungen des Rohrfangs nicht die gleiche Größe wie für Dehnungen der Rohrlänge hat, denn die Voraussetzungen unserer Formel (14) enthalten hinsichtlich einer solchen Anisotropie keine Einschränkungen. Zur weiteren Prüfung unserer Theorie haben wir auf Grund dieser Überlegungen Messungen an einem Quarzrohr ausgeführt, dessen Achse parallel zur optischen Achse (Z-Achse) orientiert ist. Der Dehnungsmodul in dieser Richtung ( $E_{\parallel} = 1/s_{33}$  in Voigts Bezeichnungsweise) unterscheidet sich von dem Dehnungsmodul  $E_{\perp} = 1/s_{11}$ , der in beliebigen Richtungen senkrecht zur optischen Achse denselben Wert hat, um rund 13%, wie man aus Voigts statischen Messungen bereits weiß. Da bei Dehnungen eines so orientierten Stabes oder

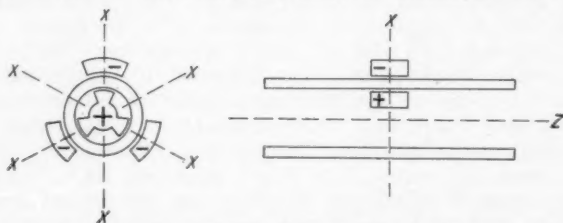


Fig. 8. Anordnung zur piezoelektrischen Anregung von Dehnungsschwingungen eines Quarzrohrs

Rohres keine Winkeländerungen auftreten, wie im allgemeinen Fall beliebiger Orientierung eines Kristallstabes, so ist ein derartiges Rohr hinsichtlich der Dehnungsschwingung als isotrop zu bezeichnen, es bietet für die Bestätigung unserer Theorie und in piezoelektrischer Hinsicht folgendes besondere Interesse. Bei den speziellen Eigenschaften des Quarzes ist eine piezoelektrische Erregung von axialen Schwingungen unmittelbar, etwa durch ein in Richtung der optischen Achse verlaufendes elektrisches Feld nicht möglich, da nur ein in Richtung der elektrischen Achse (X-Achse) verlaufendes elektrisches Feld Deformationen hervorruft. Bei unserer Versuchsanordnung Fig. 8 sind daher an 3 elektrischen Achsen gleichgepolte Elektroden außen und diesen entgegengesetzt gepolte Elektroden im Inneren des Rohres angebracht. Das

Wechselfeld zwischen diesen Elektroden erzeugt periodische Längenänderungen in Richtung der X-Achsen und senkrecht dazu (Y-Achsen), also periodische Änderungen des Rohrradius, d. h. primär Radial-schwingungen. Da nun diese nach unserer Theorie mit den axialen Schwingungen elastisch gekoppelt sind, sind sekundär auch die letzteren anregbar. Hier ist der Vorgang also umgekehrt wie bei den Nickel-rohren, wo durch die Magnetostriktion primär axiale Schwingungen erregt werden, die dann sekundär durch Kopplung radiale Schwingungen erzeugen. Die gemessenen Eigenfrequenzen sind in Tab. 4 unter  $F_I$  und  $F_{II}$  angegeben. Die Festlegung ihrer Ordnungszahl und Serien-zugehörigkeit wäre hier, wo die Schwingungen sehr nahe beieinander-liegen, recht schwierig, wenn wir nicht ein einfaches und völlig sicheres

Tabelle 4

Beobachtete Eigenfrequenzen  $F_I$  und  $F_{II}$  eines Quarzrohres, ihre Abweichungen  $\Delta$  gegen die berechneten\* und ihre Temperaturkoeffizienten  $\gamma_I$  bzw.  $\gamma_{II}$  (Abmessungen des Quarzrohres: Länge  $z = 4,69$  cm, Außen-durchmesser 1,50 cm, Wandstärke 0,20 cm).

$k$	$k f_s$ kHz	$F_I$ kHz	$\Delta_I$ ‰	$F_{II}$ kHz	$\Delta_{II}$ ‰	$\gamma_I$ $\cdot 10^{-5}$	$\gamma_{II}$ $\cdot 10^{-5}$
1	66,23	—	—	134,7	- 6	8,9	0,3
2	132,5	126,4	+ 2	141,6	- 3	5,1	4,1
3	198,7	133,4	0	201,4	0	0,4	8,8
4	264,9	133,5	- 3	—	—	0,2 <sub>s</sub>	8,9 <sub>s</sub>

Hilfsmittel zur Verfügung hätten, nämlich die piezoelektrische Leucht-erscheinung nach Giebe und Scheibe, die bei Anordnung des Rohres in einem gasverdünnten Raum an jedem Deformationsmaximum der je-weils erregten Schwingung auftritt. Die mit den radialen Schwingungen verbundenen Deformationen erzeugen auf der inneren und äußeren Mantelfläche des Rohres da, wo die elektrischen Achsen durchstoßen, Glimmlichtbüschel, also rings um den Umfang einen Kranz von sechs Büscheln. Die Anzahl solcher Kränze längs des Rohres, welche die Ordnungszahl der axialen Schwingungen angibt, beträgt demnach bei der tiefsten Frequenz  $F_I$  der Tab. 4 zwei, dann weiter mit ansteigenden Frequenzen drei, vier, hierauf bei  $F_{II}$  eins, zwei, drei, d. i. eine eigen-tümliche Reihenfolge, wie sie ohne Kenntnis unserer Theorie schwerlich verständlich sein würde.

Für die Anwendung des Verfahrens *b* des § 8 zur Bestimmung der drei Unbekannten  $g$ ,  $f_s$  und  $f_z$ <sup>1)</sup> ist die Anzahl der beobachteten Frequenzen  $F$  zu klein. Wenn wir rechnerisch aus Messungen bei niedrigen Ordnungen sowohl  $f_z$  wie  $f_s$  und damit  $s_{33}$  und  $s_{11}$  mit etwa gleicher Genauigkeit bestimmen wollen, so müssen wir es offenbar so einrichten, daß die zur Beobachtung kommenden Frequenzen  $F$  sich um annähernd gleiche Beträge von  $k f_z$  und  $f_s$  unterscheiden, d. h. wir müssen

1) Die Koordinatenbezeichnung entspricht hier der in der Kristallo-graphie für das Hauptachsenkreuz üblichen; an Stelle von  $f_z$  in unseren Formeln tritt hier  $f_s$ .

in der Nähe der Resonanz  $k f_s = f_r$  messen. Die Abmessungen unseres Rohres sind so gewählt, daß für  $k = 2$  nahezu Resonanz besteht. Zur Durchführung der Rechnung haben wir die beiden für  $k = 2$  und 3 beobachteten Frequenzen  $F_I$  und  $F_{II}$ , also insgesamt vier Frequenzen  $F$ , und die Formeln (17) und (19) benutzt. Man findet aus den beiden

Summen  $\frac{1}{F_I^3} + \frac{1}{F_{II}^3} : f_s = 66,23 \text{ kHz}$ ,  $f_r = 134,2 \text{ kHz}$ , und für die Produkte:

$$\frac{F_I^3 \cdot F_{II}^3}{k^3} = \frac{f_s^3 \cdot f_r^3}{1 - q^2} = 8,00_1 \cdot 10^{10} \text{ bei } k = 2, \text{ bzw. } 8,01_9 \cdot 10^{10} \text{ bei } k = 3$$

und  $q = 0,112_4$ , bzw.  $0,121_6$ , im Mittel  $q = 0,117$ . Der Kopplungskoeffizient ist also sehr klein, was man schon unmittelbar aus der geringen Breite der toten Zone ( $F_{II} (k = 1) - F_I (k = 4) = 134,7 - 133,5$ ) schließen kann. Der geringe Unterschied von  $2,2\%$  zwischen den beiden Produkten bei  $k = 2$  und 3 macht für  $q$ , weil  $q^3$  klein gegen 1 ist, prozentlich sehr viel aus.  $q$  ist also hier nicht sehr genau bestimmbar. Berechnet man rückwärts mit den für  $f_s$ ,  $f_r$  und  $q$  gefundenen Zahlenwerten nach Formel (16) die Frequenzen  $F$  für verschiedene Ordnungen  $k$ , so liegen ihre Differenzen (Tab. 4) gegen die entsprechenden beobachteten Frequenzen in fünf von sechs Fällen zwischen 0 und  $3\%$  und sind nur in einem Fall mit  $6\%$  ein wenig groß.

Durch Einsetzen der Rohrabmessungen (Tab. 4) und obiger Werte von  $f_s$  und  $f_r$  in die Formeln (2) und (13) ergibt sich:

$$s_{11} = \frac{1}{E_{\perp}} = 12,56 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^2/\text{Dyn},$$

$$s_{33} = \frac{1}{E_{\parallel}} = 9,78 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^2/\text{Dyn}.$$

Das Verhältnis von Querkontraktion zu Längsdilatation ist nach Voigt für Drücke in der Z-Richtung  $s_{13}/s_{33}$ , für Drücke in der X- oder Y-Richtung  $s_{13}/s_{11}$ . Wenn man in der Determinante Formel (5) nicht, wie

in § 4  $a_{13} = a_{31}$  setzt, so tritt an Stelle von Gl. (8)  $q = \sqrt{\frac{a_{13} a_{31}}{a_{11} a_{33}}}$  und es

folgt für Quarz aus obigen Modulverhältnissen  $q = \frac{s_{13}}{\sqrt{s_{11} s_{33}}}$  und hieraus

mit unseren Meßergebnissen  $s_{13} = 1,30 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^2/\text{Dyn}$ . Inwieweit unsere Resultate mit denjenigen anderer Beobachter übereinstimmen, ist aus Tab. 5 ersichtlich.

Die in Prozenten recht große Differenz zwischen den beiden Zahlenwerten für  $s_{13}$  ist wahrscheinlich darauf zurückzuführen, daß dieser sehr kleine Modul sowohl nach unserer als nach der statischen Methode nicht sehr genau bestimmbar ist (vgl. hierzu auch § 11). Bei den großen Modulwerten  $s_{11}$  und  $s_{33}$  ist demgegenüber die Übereinstimmung der verschiedenen Meßresultate gut. Damit ist die Gültigkeit unserer Formel auch für den Fall von Anisotropie, wo die Elastizitätsmoduln parallel und senkrecht zur Rohrachse verschieden sind, erwiesen. Bemerkenswert ist, daß man hier durch vier Frequenzmessungen an einem und demselben Kristallrohr drei von den sechs den Quarz charakterisierenden Moduln bestimmen kann.

Erwähnt sei noch, daß man in der Anordnung Fig. 8 auch radiale Eigenfrequenzen höherer Ordnung anregen kann, was unter den Anregungsbedingungen durch Magnetostriktion bei Nickelröhren nicht



Tabelle 5

Modulwerte in  $10^{-12}$  cm<sup>2</sup>/Dyn bei Raumtemperatur

Beobachter	Voigt <sup>1)</sup>	Perrier und Mandrot <sup>2)</sup>	Giebe und Scheibe <sup>3)</sup>	Giebe und Blechschmidt
$s_{11}$	12,95	12,70	12,72	12,56
$s_{33}$	9,89	9,71	9,68	9,78
$s_{13}$	1,53	—	—	1,30

möglich ist. Die für die Ordnungen  $n = 1, 2, 3, 4$  gemessenen radialen Eigenfrequenzen des Quarzrohrs gehören bis auf weniger als 1% dem Gesetz (12), sie sind nicht wie die Radialschwingung  $f_r$  der Ordnung  $n = 0$  mit den axialen Schwingungen gekoppelt.

Auf entsprechende Weise würde sich feststellen lassen, ob durch das Ziehen von Rohren oder durch ihre longitudinale Magnetisierung eine Anisotropie parallel und senkrecht zur Achse hervorgerufen wird. Bei dünnwandigen harten Nickelrohren scheint dies nach den Ergebnissen der Tab. 1 nicht in sicher meßbarem Maß der Fall zu sein (vgl. hierzu § 14).

Es ist bekannt, daß der Temperaturkoeffizient (T.-K.) der Frequenz von Quarzresonatoren in Platten- oder in Stabform je nach dem Verhältnis der linearen Abmessungen sehr verschieden ist. Diese Erscheinung wird in einigen Veröffentlichungen darauf zurückgeführt, daß die Schwingungen der Resonatoren nicht von einfacher, longitudinaler Art sind, sondern durch Kopplungen mit andersartigen Schwingungen, die einen anderen T.-K. haben als jene, beeinflusst werden. Diese Deutungen konnten jedoch bisher nicht bis zu einer zahlenmäßigen Vorausberechnung des T.-K. ausgestaltet werden. Im vorliegenden Fall unseres Quarzrohrs sind wir in der Lage, mit Hilfe der Formeln unserer Theorie die T.-K. der verschiedenen Eigenfrequenzen  $F$  aus denjenigen der Eigenfrequenzen  $f_s$  und  $f_r$  zu berechnen. Die T.-K. der Elastizitätsmoduln  $E_{\perp} = 1/s_{11}$  und  $E_{\parallel} = 1/s_{33}$  parallel<sup>4)</sup> und senkrecht<sup>5)</sup> zur optischen Achse sind rund  $-10 \cdot 10^{-6}$ , bzw.  $-200 \cdot 10^{-6}$ . Hieraus berechnen<sup>6)</sup> sich mit den bekannten thermischen Ausdehnungskoeffizienten die T.-K. der Frequenz für  $f_s$  zu  $\alpha = -90 \cdot 10^{-6}$  und für  $f_r$  zu  $\beta = -2 \cdot 10^{-6}$ . Bezeichnen wir mit  $\gamma_I$  bzw.  $\gamma_{II}$  die T.-K. der Frequenzen  $F_I$  bzw.  $F_{II}$  der beiden Serien, so folgt zunächst aus (17), also für die gleiche Ordnung in beiden Serien

$$\gamma_I + \gamma_{II} = \alpha + \beta.$$

Für die Berechnung eines der  $\gamma$ -Werte benutzt man die Hauptformeln (14) oder (16), wobei man in sicher zulässiger Weise  $\mu$  als temperaturunabhängig ansehen kann. Das Resultat dieser Rechnung ist in der Tab. 4 angegeben. Man erkennt, wie außerordentlich stark sich der

1) W. Voigt, Wiedemanns Ann. **31**. S. 718. 1887. Von uns umgerechnet auf CGS-Einheiten und adiabatische Werte.

2) A. Perrier u. R. de Mandrot, Mem. Soc. Vaudoise des Sciences Nat. **1**. S. 333. 1923. Umgerechnet wie unter 1).

3) E. Giebe u. E. Blechschmidt, a. a. O.

4) A. Perrier u. R. de Mandrot, a. a. O.

5) E. Giebe u. A. Scheibe, Jahrb. d. drahtl. Telegraphie u. Telephonie **35**. S. 165. 1930.

T.-K. von  $F$  mit der Ordnung  $k$  in der Nähe der Resonanz ändert. Für  $k = 1$  in Serie I und  $k = 4$  in Serie II ist  $\gamma_I \approx \gamma_{II}$  und nahe gleich dem T.-K.  $\alpha$  von  $F_n$ , da in beiden Fällen die Schwingungen vorwiegend axiale sind. Entsprechend ist für  $k = 4$  in Serie I und  $k = 1$  in Serie II  $\gamma_I \approx \gamma_{II} \approx \beta$ , da  $F_I$  bzw.  $F_{II}$  hier vorwiegend radiale Schwingungen eines Ringes bzw. eines unendlich langen Rohres sind. Im Fall der Resonanz zwischen  $f_s$  und  $f_r$ , die für  $k = 2$  nahezu besteht, sind bei der gleichen Ordnung in beiden Serien die T.-K.  $\gamma$  nahe gleich groß.<sup>1)</sup>

### Dehnungsschwingungen von Zylindern

#### § 10. Ableitung und Diskussion der Frequenzformel

Die Lösung, die sich für dieses Problem mit den mathematischen Hilfsmitteln der Elastizitätstheorie ergibt, ist unzulänglich<sup>2)</sup>, weil sie den Grenzbedingungen, die Spannungsfreiheit der Endflächen erfordern, nicht, oder mit hinreichender Annäherung nur dann genügt, wenn der Radius ziemlich klein gegen die Länge des Zylinders ist. In erster Näherung führt jene Lösung auf die Rayleighsche Dickenkorrektur, die ja aber, wie wir in § 3 erläutert haben, die Beobachtungen nicht richtig wiedergibt. Mit unserer kopplungstheoretischen Vorstellung gelangen wir demgegenüber zu einer Formel, die, wie wir zeigen werden, in weitem Frequenzbereich in guter Übereinstimmung mit den Meßergebnissen ist.

Ebenso wie das Rohr ist der Zylinder durch zwei Abmessungen, die Länge und den Radius, bestimmt und daher aus zwei gekoppelten Teilsystemen zusammengesetzt zu denken, von denen das eine axiale, das andere radiale Schwingungen ausführt. Wenn wir in ganz entsprechender Weise wie beim Rohr verfahren, so haben wir für die axialen Schwingungen die harmonische Reihe der Eigenfrequenzen eines sehr dünnen Stabes gemäß Formel (11) einzusetzen und für die radialen die Eigenfrequenzen einer sehr dünnen Kreisscheibe. Für diese ist bereits eine Formel bekannt<sup>3)</sup>, sie lautet:

$$(34) \quad f_r = \frac{\zeta}{2\pi r} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\mu^2)}}$$

( $r$  = Radius,  $\mu$  = Poissonsche Konstante), wo  $\zeta$  die Wurzeln der Gleichung

$$(35) \quad \zeta J_1'(\zeta) + \mu J_1(\zeta) = 0$$

1) Die experimentelle Nachprüfung der Rechnung konnte leider nicht durchgeführt werden, weil während eines Versuches das schwingende Quarzrohr durch einen kleinen Sprung unbrauchbar wurde.

2) A. H. Love-A. Timpe, a. a. O., S. 335; M. v. Laue, *Ztschr. f. Phys.* **34**, S. 351. 1925.

3) A. H. Love-A. Timpe, a. a. O., S. 655.

und  $J_1$  die Besselsche Funktion von der Ordnung 1 bedeuten.

Eine Kreisscheibe hat also eine unendliche Reihe von Oberschwingungen, bei der niedrigsten Schwingung ist nur der Mittelpunkt in Ruhe, bei den weiteren Oberschwingungen bilden sich außer dem Knotenpunkt in der Mitte 1, 2 usw. kreisförmige Knotenlinien aus. Bei einer derartigen Deformationsverteilung können infolge von Kopplung mit den axialen Schwingungen Radialschwingungen auch höherer Ordnung angeregt werden, während beim Rohr, wie wir sahen, nur die niedrigste Radialschwingung entsteht. Wir wollen jedoch auch beim Zylinder nur die niedrigste Radialschwingung in Betracht ziehen, für die  $\zeta$  rund 2 ist und bemerken, daß die nächste Oberschwingung bereits rund 2,7mal höher liegt und dementsprechend weniger auf die Axialschwingung zurückwirkt. Die tiefste Frequenz  $f_r$  nach Gl. (34) ist die obere Grenzfrequenz  $F_I(\max)$  der Serie I; die untere Grenzfrequenz  $F_{II}(\min)$  der Serie II ist, entsprechend wie beim Rohr, die Grundfrequenz der radialen Dehnungsschwingungen eines unendlich langen Zylinders. Für diese gilt nach Airey<sup>1)</sup>:

$$(36) \quad f_r' = \frac{\xi}{2\pi r} \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}},$$

wo  $\xi$  die Wurzeln der Gleichung

$$(37) \quad \xi J_1'(\xi) + \frac{\mu}{1-\mu} J_1(\xi) = 0$$

bedeuten. Wir berücksichtigen auch hier nur die niedrigste radiale Eigenfrequenz des Zylinders. Aus (34) und (36) berechnet sich nach Formel (25) der Kopplungskoeffizient zu

$$(38) \quad q = \sqrt{1 - \left(\frac{f_r}{f_r'}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\zeta}{\xi}\right)^2 \frac{1-2\mu}{(1-\mu)^2}}.$$

Die Zahlenwerte von  $\zeta$ ,  $\xi^2$  und  $q$  für verschiedene Größen  $\mu$  sind in Tab. 6 angegeben.

Die Frequenzgleichung für einen zylindrischen Stab von beliebigen Abmessungen lautet demnach wie Gl. (14), wenn man für  $f_r$  und  $q$  die durch die Gl. (34) bzw. (38) gegebenen Ausdrücke einsetzt. Entsprechend gelten für die Grenzwerte der beiden Frequenzserien die in § 8 abgeleiteten Formeln. Resonanz zwischen axialen und radialen Schwingungen tritt

1) J. R. Airey, Arch. d. Mathem. u. Phys. 20. S. 290. 1913.

2) Über die numerische Berechnung vgl. J. R. Airey, a. a. O.

Tabelle 6

1	2	3	4	5	6
$\mu$	$\zeta$	$\xi$	$\zeta/\xi$	$\sqrt{1-\mu^2}$	$q$
0,33	2,069	2,166 <sup>1)</sup>	0,955	0,944	0,556
0,30	2,048	2,126	0,963	0,954	0,493
0,25	2,016	2,069	0,974	0,968	0,396
0,23	2,003	2,048	0,978	0,973	0,359
0,20	1,983	2,016	0,984	0,980	0,304
0,13	1,935	1,948 <sup>2)</sup>	0,993	0,992	0,190

ein für  $k f_x = f_r$ , d. h. bei einem Verhältnis von Radius  $r$  zu Länge  $x$  von

$$(39) \quad \frac{r}{x} = \frac{\zeta}{k\pi\sqrt{1-\mu^2}}$$

und für die Grundschiwingung  $k=1$ , wenn die Länge gleich  $0,71 D$  ( $D$  = Durchmesser) bei  $\mu = \frac{1}{3}$  bzw.  $0,75 D$  bei  $\mu = \frac{1}{4}$  ist. Die elastische Halbwellenlänge der axialen Schwingungen ist also im Resonanzfalle kürzer als die Querdimension.

Bei einem dünnwandigen Rohr vom mittleren Durchmesser  $D$  tritt die Resonanz für  $x = 1,57 D$  (§ 5, e), also gegenüber dem Zylinder schon bei rund der doppelten Länge ein. Hieraus erklärt es sich, daß bei der gleichen Ordnung  $k$  die Harmonieabweichungen (vgl. Fig. 1b) eines Rohres viel größer sind als diejenigen eines Zylinders, wenn Länge und Durchmesser in beiden Fällen gleich groß sind.

Bei sehr großem Zylinderdurchmesser ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für sehr hohe Eigenfrequenzen der Serie II [vgl. Formel (22)]

$$(40) \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-q^2)}} = \frac{\xi}{\zeta} \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{\frac{E \cdot (1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}}.$$

Aus dem Vergleich dieser Formel mit der Formel (65), die wir in § 13 ableiten werden, ergibt sich, daß

$$(41) \quad \frac{\zeta}{\xi} \approx \sqrt{1-\mu^2}$$

sein muß, wie das die Zahlenwerte in Tab. 6 auch zeigen. An Stelle von (38) folgt mit (41) der Näherungswert

$$(42) \quad q \approx \mu \sqrt{\frac{2}{1-\mu}}.$$

1) Von J. R. Airey (a. a. O.) berechnet.

2) Durch Interpolation gewonnen.

Eine Näherungsformel zur Berechnung der tieferen Eigenfrequenzen der Serie I, die so lange gilt, als die radiale Eigenfrequenz  $f_r$  noch merklich größer als  $k f_z$  ist, erhalten wir, indem wir wie bei den Rohren im Nenner des Korrektionsgliedes unter der Wurzel von Gl. (29)  $F$  durch den Näherungswert  $k f_z$  ersetzen; diese Formel lautet:

$$(43) \quad \frac{k f_z}{F} = \sqrt{1 + \frac{q^2 k^2 f_z^2}{f_r^2 - k^2 f_z^2}}$$

und liefert für Verhältnisse  $u = \frac{k f_z}{f_r}$  bis zu 0,5 innerhalb etwa 1‰ richtige Resultate für  $F$ ; sie ergibt z. B. für einen Nickelzylinder von 100 mm Länge und 10 mm Durchmesser mit  $q = 0,465$ ,  $\mu = 0,287$  bei der 7. Oberschwingung, wo  $u = 0,541$  ist,  $\frac{k f_z}{F} = 1,0374$  gegenüber 1,0359 nach der genaueren und 1,0268 nach Rayleighs Formel. Führt man für die Eigenfrequenzen die Ausdrücke (2) und (34), für  $q$  den Näherungswert (42) und für  $\zeta$  als Näherungswert die Zahl 2 nach Tab. 6 ein, so wird aus (43)

$$(44) \quad \frac{k f_z}{F} = \sqrt{1 + \frac{\mu^2 r^2 k^2 \pi^2}{2x^2} \cdot \frac{(1 + \mu)}{1 - \frac{r^2 k^2 \pi^2 (1 - \mu^2)}{4x^2}}}$$

Der erste Faktor des Korrektionsgliedes entspricht der Rayleighschen Formel (4), der zweite Faktor, der in letzterer gleich Eins ist, bewirkt jedoch eine wesentliche Vergrößerung.

#### § 11. Meßergebnisse

Zur Prüfung unserer Theorie wurden die Eigenfrequenzen von zylindrischen Stäben aus Nickel (technisch rein), Indilatans (36% Ni, Rest neben anderen geringen Zusätzen Fe), Cekas (59,9% Ni, 11,2% Cr, 26,9% Fe) und aus Bergkristall (Stabachse parallel zur elektrischen Achse) durchgemessen. Die Metallstäbe sind sämtlich gezogen, sie haben verschiedene Durchmesser und Längen. Die Abmessungen sind in Tab. 7, Spalten 3, 4 angegeben. Die Nickelstäbe Nr. 1—3 sind Stücke eines und desselben langen Stabes von 10 mm Durchmesser, Nr. 3 ist auf 7,5 mm abgedreht. Der Nickelstab Nr. 4 ist ein Material anderer Herkunft, er hat daher einen etwas anderen Elastizitätsmodul  $E$  (Spalte 11) als Nr. 1—3. Die Legierungen Indilatans und Cekas haben wir gewählt, weil sie nach unseren früheren Untersuchungen<sup>1)</sup> kleine Dämpfung und kleinen  $\Delta E$ -

1) E. Giebe u. E. Blechschmidt, a. a. O.

Ta-  
Meßergebnisse

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nr.	Material	Abmessungen		$F_1$ in kHz	$f_s$ in kHz	$\varepsilon$ in ‰	$\delta_1$ in ‰	$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ in m/sec
		$x$ in mm	$2r$ in mm					
1	Nickel	100,2	10,00	24,75	24,76	+0,5	+0,6	4962
2	"	89,95	10,00	27,51	27,57	+2,0	+0,8	4960
3	"	100,1	7,50	24,84	24,72	-4,5	+0,3	4949
4	"	50,1	5,00	50,65	50,81	+3,0	+0,6	5091
5	Indilatans	100,1	10,00	21,64	21,62	-1,0	+0,4	4326
6	"	99,7	4,81	22,09	22,04	-2,5	+0,1	4395
7	Cekas	82,4	4,00	27,67	27,72	+2,0	+0,1	4568
8	Quarz	50,13	3,04	54,03	54,16	+2,5	—	5430

Ta-  
Beobachtete Eigenfrequenzen  $F$  von Zylindern in Kilohertz

$$\left( d = \frac{F_{\text{beob.}} - F_{\text{ber.}}}{F_{\text{ber.}}}, \text{ Nr. 1—4 Nickel,} \right.$$

$k$	Nr. 1 100 × 10			Nr. 2 90 × 10		Nr. 3 100 × 7,5		Nr. 4 50 × 5	
	$k f_z$ in kHz	$F$ in kHz	$d$ in ‰	$F$ in kHz	$d$ in ‰	$F$ in kHz	$d$ in ‰	$F$ in kHz	$d$ in ‰
1	24,76	24,75	0	27,51	-1	24,84	+5	50,65	-2
2	49,53	49,40	0	54,98	0	49,38	0	101,3	-1
3	74,29	73,86	0	82,11	-1	73,78	-2	151,4	-2
4	99,05	98,09	+1	109,0	+1	98,38	0	200,7	-2
5	123,8	121,8	0	135,0	0	122,5	0	249,5	-2
6	148,6	144,9	0	160,5	+1	146,3	0	297,7	0
7	173,3	167,4	+1	184,3	0	170,1	+1	343,8	0
8	198,1	188,7	+1	206,6	-1	193,1	+1	387,9	+1
9	222,9	208,6	0	227,4	0	215,7	+1	428,6	-1
10	247,6	226,9	0	245,7	+1	237,0	-1	466,9	0
11	272,4	242,8	-2	260,4	-2	258,4	+1	499,4	-3
12	297,2	256,5	-4	274,1	+2	278,7	+3	529,2	-3
13	321,9	270,1	+2	284,9	+3	296,5	0	555,5	-1
14	346,7	281,1	+5	289,0	-7	313,4	-1	579,8	+6
15	371,4	286,2	-5	—	—	328,9	-2	598,6	+9
16	—	—	—	—	—	343,5	-1	—	—
17	—	—	—	—	—	356,2	0	—	—
18	—	—	—	—	—	367,8	+1	—	—
19	—	—	—	—	—	378,5	+5	—	—
20	—	—	—	—	—	385,3	+1	—	—
21	—	—	—	—	—	390,7	-2	—	—

Ta-  
gebnisse

belle 7  
für Zylinder

9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\nu = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ in m/sec	$\rho$	$E$ $10^{11}$ Dyn/cm <sup>2</sup>	$f$ , exp. in kHz	$f$ , ber. in kHz	$\zeta$	$\xi$	$q$	$\mu$
4962	8,85	21,79	331,2	337,3	2,040	2,110	0,465	0,287
4960	8,85	21,77	331,7	337,0	2,039	2,109	0,464	0,286
4949	8,85	21,68	444,2	448,6	2,040	2,110	0,466	0,287
5091	8,85	22,94	682,6	688,5	2,037	2,105	0,458	0,283
4326	8,11	15,18	286,5	285,0	2,010	2,058	0,376	0,240
4395	8,11	15,66	601,7	600,8	2,008	2,055	0,371	0,237
4568	8,09	16,88	749,0	751,0	2,006	2,051	0,364	0,234
5430	2,65	7,814	956,1	—	—	—	0,239	—

Ta-  
loherzt

belle 8  
und ihre Abweichungen  $\Delta$  gegen die berechneten

Nickel,

Nr. 5—6 Indilatans, Nr. 7 Cekas, Nr. 8 Quarz)

$\frac{\Delta}{F}$ in ‰	Nr. 5 100 × 10		Nr. 6 100 × 5		Nr. 7 82 × 4		Nr. 8 50 × 3	
	$F$ in kHz	$\Delta$ in ‰	$F$ in kHz	$\Delta$ in ‰	$F$ in kHz	$\Delta$ in ‰	$F$ in kHz	$\Delta$ in ‰
-2	21,64	0	22,09	+3	27,67	-1	54,03	-3
-1	43,19	+1	44,01	-1	55,41	0	108,2	-1
-2	64,62	0	65,93	-2	82,97	-1	162,2	-1
-2	85,92	0	87,85	-2	110,6	-1	216,2	-1
-2	106,9	0	109,7	-2	138,0	-2	270,1	0
0	127,5	0	131,4	-3	165,6	-1	323,8	0
0	147,6	0	153,3	-2	193,1	+1	377,3	0
+1	167,2	+1	174,9	-2	220,2	-1	430,3	0
-1	185,7	+2	196,6	-1	247,5	0	482,9	0
0	202,4	0	218,0	0	274,5	0	534,7	0
-3	217,6	0	239,3	0	301,1	0	585,9	-1
-3	231,1	+1	260,2	-1	327,7	0	636,1	0
-1	242,8	+4	280,9	-1	353,6	0	684,6	+1
+6	250,3	-1	301,9	+1	379,5	0	729,7	0
+9	—	—	322,0	+1	404,7	0	771,4	-1
—	—	—	341,9	+1	430,0	0	809,3	-1
—	—	—	361,3	+1	454,3	0	841,3	0
—	—	—	379,8	0	478,3	+1	867,6	-1
—	—	—	397,8	0	500,6	0	890,6	+5
—	—	—	415,0	-1	523,1	+1	—	—
—	—	—	431,8	-1	543,0	-1	—	—

30\*



Effekt aufweisen und merklich andere elastische Konstanten  $E$  und  $\mu$  (vgl. Tab. 7) haben. Über den Quarzstab sprechen wir weiter unten.

Die beobachteten Frequenzen  $F$ , und zwar nur solche der Serie I, sind in der Tab. 8 für die linksstehenden Ordnungszahlen  $k$  enthalten; für den Stab Nr. 1 ist zum Vergleich auch die harmonische Reihe  $kf_0$  der ungestörten Axialschwingungen angegeben. Dagegen haben wir auf die Mitteilung der im Gebiet der Serie II beobachteten Eigenfrequenzen verzichtet, und zwar deshalb, weil wesentlich mehr Eigenschwingungen auftreten, als nach unserer Theorie zu erwarten sind. Sogar in der toten Zone, die von der Theorie bei Zylindern ebenso wie bei Rohren gefordert wird. Alle diese Schwingungen haben außerdem sehr kleine Amplituden, so daß ihre Ordnungszahlen nicht feststellbar sind. Oberhalb desjenigen Bereichs der Frequenzen  $F$ , wo axiale und radiale Schwingungen zur Resonanz kommen, tritt eine durch unsere Theorie nicht erklärbare, sehr kräftige Eigenschwingung auf, deren Frequenz  $\varphi$  bei den Nickelstäben Nr. 1, 2, 3, 4 die folgenden Werte hatte: 287,5, 287,3, 384,1, 577,3 kHz; sie ist offenbar unabhängig von der Stablänge und nur durch den Radius  $r$  des Zylinders bestimmt, denn das Produkt  $\varphi \cdot 2r$  ist für alle vier Stäbe nahezu gleich groß, im Mittel 287,9.

Aus den genannten Gründen konnten wir unsere theoretischen Formeln nur im Frequenzbereich der Serie I prüfen und wir werden nachweisen, daß in diesem Bereich unsere Theorie durch die Messungen sehr gut bestätigt wird. Zunächst wollen wir an einigen Beispielen aus dem Beobachtungsmaterial Tab. 8 zeigen, daß das Ähnlichkeitsgesetz erfüllt ist. Die Längen der beiden Nickelstäbe 1 und 2 verhalten sich bei gleichem Durchmesser wie 10:9. Die 10. Oberschwingung von Stab 1 hat also die gleiche elastische Wellenlänge wie die 9. von Stab 2, dementsprechend müssen auch die Eigenfrequenzen  $F$  gleich groß sein. Beobachtet ist für Nr. 1  $F = 226,9$  kHz bei  $k = 10$ , für Nr. 2  $F = 227,4$  kHz bei  $k = 9$ . Die Durchmesser der gleich langen Stäbe Nr. 1 und 3 verhalten sich wie 10:7,5 = 4:3. Das Ähnlichkeitsgesetz verlangt, daß für die Oberschwingung der Ordnung  $k$  von Stab 1 und für diejenigen der Ordnung  $k' = \frac{4}{3}k$  von Stab 3 die Harmonieabweichungen

$\delta = \frac{(kf_0 - F)}{F}$  bzw.  $\delta' = \frac{(k'f'_0 - F')}{F'}$  gleich groß sind. Aus Tab. 8 berechnet sich z. B. für  $k = 9$  und 12 bei Stab 1  $\delta = 6,86$  und  $15,87\%$  bzw. für  $k' = 12$  und 16  $\delta' = 6,95$  und

15,70%, d. h.  $\delta$  ist in der Tat nahe gleich  $\delta'$ . Noch besser, und für den ganzen Frequenzbereich, erkennt man die Gültigkeit des Ähnlichkeitsgesetzes, wenn man nach Art von Fig. 1c die beobachteten Harmonieabweichungen  $\delta$  als Ordinaten über den Verhältnissen  $k f_z / f_r$  als Abszissen graphisch darstellt. Für alle drei Nickelstäbe 1, 2, 3 gleichen Materials liegen dann sämtliche beobachteten  $\delta$ -Werte sehr nahe auf einer und derselben Kurve. Zur Prüfung unserer für Zylinder abgeleiteten Formeln (14), (34) bis (38) können wir, da bei Zylindern nur die Eigenfrequenzen der Serie I sicher beobachtbar sind, nur das eine der bei den Rohren angewandte Verfahren benutzen, nämlich die graphische Darstellung nach Fig. 6 gemäß Formel (31). Für jeden der untersuchten Stäbe ordnen sich dabei die einzelnen Meßpunkte recht gut längs einer geraden Linie an; aus ihrer Neigung ergibt sich das Quadrat des Kopplungskoeffizienten  $q$ , außerdem als Achsenabschnitt  $f_r^2$ . Nur bei den niedrigsten Ordnungen  $k = 1$  bis etwa 3 ist die Streuung wieder, wie bei Rohren, ziemlich groß wegen der Kleinheit der Differenzen  $k^2 f_z^2 - F^2$  und infolge von Inhomogenitäten. An der beobachteten Grundschwingung  $F_1$  haben wir ebenso wie bei den Rohren eine kleine Inhomogenitätskorrektur  $\epsilon$ , Tab. 7, Spalte 7, angebracht, die zwar in einzelnen Fällen mit dem theoretisch zu erwartenden Werte  $\delta_1$ , Spalte 8, Tab. 7, der Harmonieabweichung bei  $k = 1$  annähernd übereinstimmt, wie es bei völlig homogenem Material sein sollte, in anderen Fällen aber sogar das entgegengesetzte Vorzeichen hat. Im ganzen sind die  $\epsilon$ -Korrekturen bei Zylindern kleiner als bei dünnen Rohren. Die experimentell bestimmten Werte von  $f_r$  (Spalte 12) stimmen im ganzen gut mit den theoretischen Werten (Spalte 13) überein, die nach Formel (34) berechnet sind; für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v$  (Spalte 9) ist bei dieser Rechnung der Wert eingesetzt, der sich aus  $f_z$  (Spalte 6)

und  $x$  (Spalte 3) nach der Formel  $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  ergibt. Bei den vier Nickelzylindern liegen zwar die experimentellen Werte von  $f_r$  systematisch 1–2% niedriger als die theoretischen, wir möchten jedoch diese Differenzen, welche übrigens die Genauigkeit der graphischen Extrapolation nicht wesentlich überschreiten, keine Bedeutung beimessen. Für die richtige Bestimmung von  $f_r$  sind nämlich hauptsächlich die höchsten Oberschwingungen maßgebend, deren Frequenzwert vielleicht schon durch die obengenannte Störschwingung beeinflusst ist. Sollten diese Differenzen wenigstens zum Teil reell sein, so würde dies bedeuten, daß die Elastizitätsmoduln parallel und

senkrecht zur Achse der gezogenen Stäbe nicht genau gleich sind (vgl. hierzu § 14).

Die Kopplungskoeffizienten  $q$  (Spalte 16) sind recht groß, rund das  $1\frac{1}{3}$  fache des Wertes für Rohre. Mit Hilfe von Formel (38) bzw. durch Interpolation zwischen den hiermit berechneten Zahlenwerten von  $\zeta$ ,  $\xi$ ,  $q$  in Tab. 6 findet man die Werte der Poissonschen Konstanten  $\mu$  (Spalte 17). Für die vier Nickelstäbe ergibt sich im Mittel  $\mu = 0,286$  gegen 0,293 bei Nickelrohren (Tab. 1), die aber aus Material von anderer Herkunft bestehen. Im übrigen entsprechen die Differenzen von  $\pm 1\%$  gegen das Mittel beider  $\mu$ -Werte etwa der erreichbaren Genauigkeit. Auffallend klein, weniger als ein Viertel, ergibt sich  $\mu$  für die sehr harte Legierung Indilatans; dieses Resultat wird durch Messungen an rechteckigen Stäben in § 14 bestätigt. Mit den gefundenen Werten von  $q$  und  $f$ , wurde rückwärts nach Formel (14) die Reihe der Frequenzen  $F$  berechnet. Die Differenzen  $\Delta$  dieser Frequenzwerte gegen die beobachteten, die in Tab. 8 angegeben sind, betragen meist nur  $0-1\%$ , einige Male  $2\%$  und fast ausschließlich bei einigen der höchsten und der tiefsten Eigenfrequenzen etwas mehr; die Ursache ist in den letzteren Fällen einerseits die Inhomogenität (vgl. § 14), andererseits in der Nähe der Resonanz das Auftreten der schon oben erwähnten Störschwingung.

Unsere Theorie wird also auch bei Zylindern in ausgezeichnete Weise bestätigt<sup>1)</sup>, soweit sie die Eigenfrequenzen der Serie I bis zur Resonanz zwischen axialen und radialen Schwingungen betrifft, die z. B. für Zylinder Nr. 1 nahe bei der Ordnung  $k = 14$  liegt. Die Harmonieabweichung bei Resonanz beträgt rund  $21\%$ . Jenseits der Resonanz und im Gebiet der Serie II ließ sich unsere Formel allerdings nicht nachprüfen. Hier machen sich Einflüsse geltend, die im Ansatz unserer Theorie nicht enthalten sind.

Unsere Formel (14) gestattet auch die beobachtete Reihe der Eigenfrequenzen eines Quarzzylinders<sup>2)</sup>, dessen Achse parallel der elektrischen

1) D. S. Muzzey, Phys. Rev. [II] 36. S. 935. 1930, findet durch Messungen an Stahlzylindern, die in Oszillatorschaltung durch Magnetostraktion zu Schwingungen angeregt wurden, die Rayleighsche Korrektur in dem von ihm untersuchten Frequenzbereich bis auf  $1-2\%$  bestätigt, im Gegensatz zu unseren Ergebnissen. Die kürzeste Stablänge war dabei  $1,67 D$  ( $D =$  Durchmesser), also noch viel größer als im Resonanzfall ( $x = 0,71 D$ ), bis zu dem wir unsere Messungen ausgedehnt haben. Jene Korrektur beträgt für  $x = 1,67 D$   $1,9\%$ , unsere durch die Messung bestätigte Formel ergibt  $2,7\%$  und im Resonanzfall  $21\%$ .

2) Nach früheren Messungen von E. Giebe u. A. Scheibe, Ann. d. Phys. [5] 9. S. 93. 1931.

Kristallachse orientiert ist, wie aus den Abweichungen  $\Delta$  der beobachteten gegen die berechneten Eigenschwingungen (Tab. 8) zu erkennen ist, sehr gut darzustellen, obwohl die Formeln (34) und (38) für die Eigenfrequenzen  $f$ , einer Kreisplatte und für den Kopplungskoeffizienten  $q$  isotrope Körper voraussetzen. In der Ebene einer senkrecht zur elektrischen Achse geschnittenen Quarzplatte ändert sich der  $E$ -Modul ziemlich stark mit der Richtung und es ist bereits bekannt, daß eine solche Platte 2 Grundeigenfrequenzen hat, die durch den Höchst- und den Kleinstwert  $E$  bestimmt sind. Ebenso ändert sich die Größe von  $\mu$  mit der Richtung zu den Kristallachsen, wenn auch die Unterschiede für die 3 Hauptachsenrichtungen nicht sehr groß sind. Nach Voigts Messungen ist bei Dehnungen in Richtungen der optischen (Z)-Achse  $\mu = 0,155$ , bei Dehnungen in Richtung der elektrischen (X)-Achse  $\mu = 0,1305$  und  $0,118$  für die Querkontraktion in Richtung der Z- bzw. Y-Achse. Da der mittlere Wert von  $\mu$ , das für die Kopplung maßgebend ist, bei Quarz viel kleiner als bei Nickel ist, so schien uns wichtig festzustellen, ob unsere Formel, die sehr kleinen  $\mu$ -Werte des Quarzes ungefähr richtig ergibt, sofern sich überhaupt die Meßresultate bei Quarzylindern mit dieser Formel darstellen lassen. Wir sehen eine weitere Bestätigung unserer Theorie darin, daß in der Tat  $q$  bei Quarz viel kleiner herauskommt als bei Nickel. Wenn man nach Formel (38) aus  $q$  die Größe von  $\mu$  berechnet, so erhält man den Wert  $0,160$ , der nahe bei den oben angegebenen Voigtschen Werten liegt.

Bei der Ableitung unserer Frequenzgleichung für den Zylinder haben wir die von Love für die Dehnungseigenfrequenzen einer dünnen Kreisplatte angegebene Formel (34) als richtig vorausgesetzt; diese dürfte wohl experimentell noch nicht nachgeprüft sein, da es bisher nicht möglich war, diese Schwingungen bei isotropen Körpern, z. B. Metallplatten, anzuregen. Die Anregung gelingt bei Kristallplatten, auch von kleinem Plattendurchmesser, sehr leicht mit Hilfe der Piezoelektrizität. Um Loves Formel, die Isotropie voraussetzt, prüfen zu können, muß aber die Orientierung der Platte zu den Kristallachsen so wählen, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Plattenebene für alle Richtungen die gleiche ist. Dann sollte sich die Kristallplatte bei hinreichend geringer Dicke wie eine isotrope verhalten. Unter diesen Gesichtspunkten hat Petržílka<sup>1)</sup> die Dehnungsschwingungen einer senkrecht zur optischen Achse geschnittenen Kreisplatte aus Turmalin untersucht, die sich durch ein parallel zur optischen Achse gerichtetes elektrisches Feld leicht anregen läßt. Die Messungen ergaben jedoch um 4–6% höhere Werte für die Eigenfrequenzen der Ordnungen  $n = 0, 1, 2, \dots$  als die Berechnungen nach Loves Formel. Wegen dieser Unstimmigkeit haben wir es für nötig gehalten, ähnliche Messungen an einer kreisförmigen Quarzplatte von 20 mm Durchmesser auszuführen, die bei geringer Dicke (2 mm) als quasiisotrop anzusehen war, da die Plattenormalen in die Richtung der optischen Achse fielen. Die piezoelektrische Anregung der radialen Plattenschwingungen erfolgte, da hier, anders wie beim Turmalin, ein elektrisches Feld in Richtung der optischen Achse unwirksam ist, in entsprechender Weise wie bei unserem Quarzrohr durch 2 (oder auch mehrere) Elektroden, die ein radial in Richtung einer elektrischen Achse verlaufendes elektrisches Feld erzeugten. Es gelang 4 Eigenschwingungen ( $n = 0, 1, 2, 3$ ), die sich leicht anregen ließen, mit Hilfe der piezoelektrischen Leuchterscheinung im gasverdünnten Raum als Radial-

1) V. Petržílka, Ann. d. Phys. [5] 15. S. 881. 1932.

schwingungen vom gesuchten Typ festzustellen. Noch höhere Ordnungen konnten wegen des Auftretens von Störschwingungen nicht mehr zuverlässig bestimmt werden, da die piezoelektrischen Leuchtbilder ein sehr kompliziertes Aussehen hatten. Die Resultate von Messung und Berechnung nach Loves Formel enthält Tab. 9, die

Tabelle 9

Radiale Eigenfrequenzen [ $F$  (beob.)] einer kreisförmigen Quarzplatte ( $2r = 20,01$ , mm, Dicke 2,002 mm) und ihre Abweichungen  $\delta$  gegen die nach Formel (34) berechneten [ $f$  (ber.)]

$$\left( \delta = \frac{f_{\text{ber.}} - F_{\text{beob.}}}{F_{\text{beob.}}} \right)$$

$n$	$\zeta$	$F_{\text{beob.}}$ in kHz	$f_{\text{ber.}}$ in kHz	$\delta$ in ‰
0	1,935	169,8	169,2	- 3,5
1	5,357	467,8	468,4	+ 1,3
2	8,552	742,5	747,8	+ 7,1
3	11,717	1013,0	1024,7	+ 11,2

$\zeta$ -Werte sind die den verschiedenen  $k$  entsprechenden Wurzeln der Gl. (35). Für die Berechnung ist  $s_{11} = \frac{1}{E} = 12,72 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^2/\text{Dyn}$

(vgl. Tab. 5) und  $\mu = 0,13$  (vgl. § 15) gesetzt. Messung und Berechnung stimmt bei  $n = 0$  bis auf den kleinen Unterschied von  $\delta$  von 3,5 ‰, der innerhalb der möglichen Schwankungen von  $\nu$  und  $\mu$  liegen dürfte. Auch bei den höheren Ordnungen sind Theorie und Beobachtung in gutem Einklang, Loves Formel kann demnach als experimentell bestätigt angesehen werden, wenn auch die Differenzen  $\delta$  (Tab. 9) systematisch mit der Ordnungszahl von -3,5 ‰ bis +11,2 ‰ ansteigen. Ein solcher Gang ist nach unserer Kopplungstheorie zu erwarten, weil durch die radialen Schwingungen  $f_r$  auch die axiale Dickenschwingung  $f_z$  angeregt wird; die Rückwirkung dieser auf jene wird mit wachsender Ordnung von  $f_r$ , also zunehmender Annäherung an die Resonanz mit  $f_z$ , größer; die wirkliche Radialfrequenz, die man beobachtet, muß also entsprechend niedriger sein als nach Loves Theorie, welche die Plattendicke nicht berücksichtigt.

Berlin-Charlottenburg.

(Eingegangen 31. Juli 1933)